

Kansrekening en Statistiek

College 4

Vrijdag 18 September

1 Kansrekening

Indeling vandaag:

Tellen

1 Kansrekening

Indeling vandaag:

Tellen

Voorbeelden:

Verjaardag

Loterij

Zwendel

Monty Hall

Poker

Typische vragen: het verjaardag probleem

Wat is de kans dat twee van jullie op dezelfde dag jarig zijn?

Typische vragen: loterij

Wat is de kans om bij een loterij met 1000 loten en 3 prijzen een prijs te winnen bij het kopen van 5 loten? Is die kans veel groter dan bij het kopen van 2 loten?

Typische vragen: zwendel

Zeven weken lang ontvang je elke Maandag een brief die voorspelt of de eurokoers die week zal stijgen of dalen, en elke week blijkt die voorspelling correct.

Op de achtste Maandag ontvang je een brief waarin je tegen betaling van veel geld een voorspelling van de eurokoers de komende week kunt kopen, die je mogelijk veel geld zou kunnen opleveren.

Moet je hierop ingaan?

Typische vragen: poker

Is de kans op *full house* groter dan op *four of a kind*?

Tellen: machtsverheffen

Vb. Het aantal loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is

Tellen: machtsverheffen

Vb. Het aantal loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is 9^5 .

Tellen: machtsverheffen

Vb. Het aantal loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is 9^5 .

De kans op lot 11111 of 98822 is

Tellen: machtsverheffen

Vb. Het aantal loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is 9^5 .

De kans op lot 11111 of 98822 is $\frac{1}{9^5} + \frac{1}{9^5} = \frac{2}{9^5}$.

Tellen: machtsverheffen

Vb. Het aantal loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is 9^5 .

De kans op lot 11111 of 98822 is $\frac{1}{9^5} + \frac{1}{9^5} = \frac{2}{9^5}$.

Het aantal loten waarvan het derde cijfer 2 is is

Tellen: machtsverheffen

Vb. Het aantal loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is 9^5 .

De kans op lot 11111 of 98822 is $\frac{1}{9^5} + \frac{1}{9^5} = \frac{2}{9^5}$.

Het aantal loten waarvan het derde cijfer 2 is is 9^4 .

Tellen: machtsverheffen

Vb. Het aantal loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is 9^5 .

De kans op lot 11111 of 98822 is $\frac{1}{9^5} + \frac{1}{9^5} = \frac{2}{9^5}$.

Het aantal loten waarvan het derde cijfer 2 is is 9^4 .

De kans op een lot waarvan het eerste cijfer 1 is is

Tellen: machtsverheffen

Vb. Het aantal loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is 9^5 .

De kans op lot 11111 of 98822 is $\frac{1}{9^5} + \frac{1}{9^5} = \frac{2}{9^5}$.

Het aantal loten waarvan het derde cijfer 2 is is 9^4 .

De kans op een lot waarvan het eerste cijfer 1 is is $\frac{9^4}{9^5} = \frac{1}{9}$.

Tellen: machtsverheffen

Vb. Het aantal loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is 9^5 .

De kans op lot 11111 of 98822 is $\frac{1}{9^5} + \frac{1}{9^5} = \frac{2}{9^5}$.

Het aantal loten waarvan het derde cijfer 2 is is 9^4 .

De kans op een lot waarvan het eerste cijfer 1 is is $\frac{9^4}{9^5} = \frac{1}{9}$.

De kans op een lot waarvan het laatste cijfer > 5 is is

Tellen: machtsverheffen

Vb. Het aantal loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is 9^5 .

De kans op lot 11111 of 98822 is $\frac{1}{9^5} + \frac{1}{9^5} = \frac{2}{9^5}$.

Het aantal loten waarvan het derde cijfer 2 is is 9^4 .

De kans op een lot waarvan het eerste cijfer 1 is is $\frac{9^4}{9^5} = \frac{1}{9}$.

De kans op een lot waarvan het laatste cijfer > 5 is is $4 \cdot \frac{9^4}{9^5} = \frac{4}{9}$.

Tellen: permutaties

Vb. Het aantal loten bestaande uit 9 verschillende cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is

Tellen: permutaties

Vb. Het aantal loten bestaande uit 9 verschillende cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is $9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 9!$.

Tellen: permutaties

Vb. Het aantal loten bestaande uit 9 verschillende cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is $9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 9!$.

St. Het aantal manieren om n dingen te ordenen is $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Tellen: permutaties

Vb. Het aantal loten bestaande uit 6 verschillende cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is

Tellen: permutaties

Vb. Het aantal loten bestaande uit 6 verschillende cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{9!}{3!} = \frac{9!}{(9-6)!}$.

Tellen: permutaties

Vb. Het aantal loten bestaande uit 6 verschillende cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{9!}{3!} = \frac{9!}{(9-6)!}$.

Vb. Het aantal manieren om een voorzitter en een penningmeester te kiezen uit een groep van 20 mensen is

Tellen: permutaties

Vb. Het aantal loten bestaande uit 6 verschillende cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{9!}{3!} = \frac{9!}{(9-6)!}$.

Vb. Het aantal manieren om een voorzitter en een penningmeester te kiezen uit een groep van 20 mensen is $20 \cdot 19 = \frac{20!}{18!} = \frac{20!}{(20-2)!}$.

Tellen: permutaties

Vb. Het aantal loten bestaande uit 6 verschillende cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{9!}{3!} = \frac{9!}{(9-6)!}$.

Vb. Het aantal manieren om een voorzitter en een penningmeester te kiezen uit een groep van 20 mensen is $20 \cdot 19 = \frac{20!}{18!} = \frac{20!}{(20-2)!}$.

De kans dat M de voorzitter en J de penningmeester wordt is $\frac{1}{20 \cdot 19} = \frac{18!}{20!} = \frac{(20-2)!}{20!}$.

Tellen: permutaties

Vb. Het aantal loten bestaande uit 6 verschillende cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{9!}{3!} = \frac{9!}{(9-6)!}$.

Vb. Het aantal manieren om een voorzitter en een penningmeester te kiezen uit een groep van 20 mensen is $20 \cdot 19 = \frac{20!}{18!} = \frac{20!}{(20-2)!}$.

De kans dat M de voorzitter en J de penningmeester wordt is $\frac{1}{20 \cdot 19} = \frac{18!}{20!} = \frac{(20-2)!}{20!}$.

De kans dat M of C de voorzitter en J de penningmeester wordt is

Tellen: permutaties

Vb. Het aantal loten bestaande uit 6 verschillende cijfers in $\{1, \dots, 9\}$ is $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{9!}{3!} = \frac{9!}{(9-6)!}$.

Vb. Het aantal manieren om een voorzitter en een penningmeester te kiezen uit een groep van 20 mensen is $20 \cdot 19 = \frac{20!}{18!} = \frac{20!}{(20-2)!}$.

De kans dat M de voorzitter en J de penningmeester wordt is $\frac{1}{20 \cdot 19} = \frac{18!}{20!} = \frac{(20-2)!}{20!}$.

De kans dat M of C de voorzitter en J de penningmeester wordt is $\frac{18!}{20!} + \frac{18!}{20!} = \frac{2}{20 \cdot 19} = \frac{1}{10 \cdot 19}$.

Voorbeelden: zwendel

Zeven weken lang ontvang je elke Maandag een brief die voorspelt of de eurokoers die week zal stijgen of dalen, en elke week blijkt die voorspelling correct. Op de achtste Maandag ontvang je een brief waarin je tegen betaling van veel geld een voorspelling van de eurokoers de komende week kunt kopen, die je veel geld zou kunnen opleveren. Moet je hierop ingaan?

Voorbeelden: zwendel

Zeven weken lang ontvang je elke Maandag een brief die voorspelt of de eurokoers die week zal stijgen of dalen, en elke week blijkt die voorspelling correct. Op de achtste Maandag ontvang je een brief waarin je tegen betaling van veel geld een voorspelling van de eurokoers de komende week kunt kopen, die je veel geld zou kunnen opleveren. Moet je hierop ingaan?

Wanneer de voorspelling het resultaat is van de worp van een munt, is de kans op zeven correcte voorspellingen $\frac{1}{2}^7 = 0.008$, zeer klein.

Voorbeelden: zwendel

Zeven weken lang ontvang je elke Maandag een brief die voorspelt of de eurokoers die week zal stijgen of dalen, en elke week blijkt die voorspelling correct. Op de achtste Maandag ontvang je een brief waarin je tegen betaling van veel geld een voorspelling van de eurokoers de komende week kunt kopen, die je veel geld zou kunnen opleveren. Moet je hierop ingaan?

Wanneer de voorspelling het resultaat is van de worp van een munt, is de kans op zeven correcte voorspellingen $\frac{1}{2}^7 = 0.008$, zeer klein.

Echter, stel dat het bedrijf in de eerste week aan $2^7 = 128$ mensen een brief stuurt, waarbij in de helft een stijging en in de andere helft een daling wordt voorspeld. De tweede Maandag stuurt het bedrijf aan de 64 mensen voor wie de eerste voorspelling correct was, weer een voorspelling, op dezelfde wijze als op de eerste Maandag, enz. Aan het einde van zeven weken is er één persoon voor wie alle zeven voorspellingen correct zijn.

Voorbeelden: zwendel

Zeven weken lang ontvang je elke Maandag een brief die voorspelt of de eurokoers die week zal stijgen of dalen, en elke week blijkt die voorspelling correct. Op de achtste Maandag ontvang je een brief waarin je tegen betaling van veel geld een voorspelling van de eurokoers de komende week kunt kopen, die je veel geld zou kunnen opleveren. Moet je hierop ingaan?

Wanneer de voorspelling het resultaat is van de worp van een munt, is de kans op zeven correcte voorspellingen $\frac{1}{2}^7 = 0.008$, zeer klein.

Echter, stel dat het bedrijf in de eerste week aan $2^7 = 128$ mensen een brief stuurt, waarbij in de helft een stijging en in de andere helft een daling wordt voorspeld. De tweede Maandag stuurt het bedrijf aan de 64 mensen voor wie de eerste voorspelling correct was, weer een voorspelling, op dezelfde wijze als op de eerste Maandag, enz. Aan het einde van zeven weken is er één persoon voor wie alle zeven voorspellingen correct zijn.

Niet doen dus.

Voorbeelden: het verjaardag probleem

Vb. Beschouw loten bestaande uit 6 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

De kans om een lot te trekken waarvan alle cijfers verschillend zijn is

Voorbeelden: het verjaardag probleem

Vb. Beschouw loten bestaande uit 6 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

De kans om een lot te trekken waarvan alle cijfers verschillend zijn is

$$\frac{9!}{(9-6)!9^6}.$$

Voorbeelden: het verjaardag probleem

Vb. Beschouw loten bestaande uit 6 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

De kans om een lot te trekken waarvan alle cijfers verschillend zijn is

$$\frac{9!}{(9-6)!9^6}.$$

Vb. Wat is de kans dat in een groep van 45 mensen tenminste twee mensen op dezelfde dag jarig zijn?

Voorbeelden: het verjaardag probleem

Vb. Beschouw loten bestaande uit 6 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

De kans om een lot te trekken waarvan alle cijfers verschillend zijn is

$$\frac{9!}{(9-6)!9^6}.$$

Vb. Wat is de kans dat in een groep van 45 mensen tenminste twee mensen op dezelfde dag jarig zijn?

Het aantal verschillende mogelijke verdelingen van de verjaardagen is

Voorbeelden: het verjaardag probleem

Vb. Beschouw loten bestaande uit 6 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

De kans om een lot te trekken waarvan alle cijfers verschillend zijn is

$$\frac{9!}{(9-6)!9^6}.$$

Vb. Wat is de kans dat in een groep van 45 mensen tenminste twee mensen op dezelfde dag jarig zijn?

Het aantal verschillende mogelijke verdelingen van de verjaardagen is 365^{45} .

Voorbeelden: het verjaardag probleem

Vb. Beschouw loten bestaande uit 6 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

De kans om een lot te trekken waarvan alle cijfers verschillend zijn is

$$\frac{9!}{(9-6)!9^6}.$$

Vb. Wat is de kans dat in een groep van 45 mensen tenminste twee mensen op dezelfde dag jarig zijn?

Het aantal verschillende mogelijke verdelingen van de verjaardagen is 365^{45} .

Het aantal mogelijke verdelingen waarbij iedereen op een verschillende dag jarig is is

Voorbeelden: het verjaardag probleem

Vb. Beschouw loten bestaande uit 6 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

De kans om een lot te trekken waarvan alle cijfers verschillend zijn is

$$\frac{9!}{(9-6)!9^6}.$$

Vb. Wat is de kans dat in een groep van 45 mensen tenminste twee mensen op dezelfde dag jarig zijn?

Het aantal verschillende mogelijke verdelingen van de verjaardagen is 365^{45} .

Het aantal mogelijke verdelingen waarbij iedereen op een verschillende dag jarig is is $\frac{365!}{(365-45)!}$.

Voorbeelden: het verjaardag probleem

Vb. Beschouw loten bestaande uit 6 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

De kans om een lot te trekken waarvan alle cijfers verschillend zijn is

$$\frac{9!}{(9-6)!9^6}.$$

Vb. Wat is de kans dat in een groep van 45 mensen tenminste twee mensen op dezelfde dag jarig zijn?

Het aantal verschillende mogelijke verdelingen van de verjaardagen is 365^{45} .

Het aantal mogelijke verdelingen waarbij iedereen op een verschillende dag jarig is is $\frac{365!}{(365-45)!}$.

De gevraagde kans is

Voorbeelden: het verjaardag probleem

Vb. Beschouw loten bestaande uit 6 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

De kans om een lot te trekken waarvan alle cijfers verschillend zijn is

$$\frac{9!}{(9-6)!9^6}.$$

Vb. Wat is de kans dat in een groep van 45 mensen tenminste twee mensen op dezelfde dag jarig zijn?

Het aantal verschillende mogelijke verdelingen van de verjaardagen is 365^{45} .

Het aantal mogelijke verdelingen waarbij iedereen op een verschillende dag jarig is is $\frac{365!}{(365-45)!}$.

De gevraagde kans is

$$\frac{365!}{(365-45)!365^{45}} > 0.891.$$

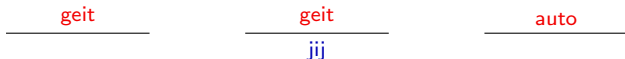
Voorbeelden: het Monty Hall probleem

Achter één van drie gesloten deuren staat een auto, achter de andere twee een geit. Jij gaat voor een deur staan. Bijv:

geit	geit	auto
_____	_____	_____
	jij	

Voorbeelden: het Monty Hall probleem

Achter één van drie gesloten deuren staat een auto, achter de andere twee een geit. Jij gaat voor een deur staan. Bijv:

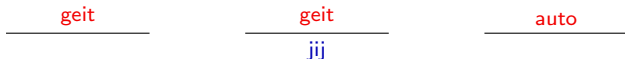


De quizmaster Monty Hall opent een van de twee deuren waar jij niet voor staat en waarachter een geit staat. In dit voorbeeld:



Voorbeelden: het Monty Hall probleem

Achter één van drie gesloten deuren staat een auto, achter de andere twee een geit. Jij gaat voor een deur staan. Bijv:



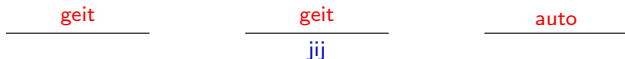
De quizmaster Monty Hall opent een van de twee deuren waar jij niet voor staat en waarachter een geit staat. In dit voorbeeld:



Jij mag blijven staan of voor de andere gesloten deur gaan staan. Vervolgens win je dat wat achter jouw deur staat. Is het beter altijd van deur te veranderen (indien je geen geit wilt)?

Voorbeelden: het Monty Hall probleem

Achter één van drie gesloten deuren staat een auto, achter de andere twee een geit. Jij gaat voor een deur staan. Bijv:



De quizmaster Monty Hall opent een van de twee deuren waar jij niet voor staat en waarachter een geit staat. In dit voorbeeld:



Jij mag blijven staan of voor de andere gesloten deur gaan staan. Vervolgens win je dat wat achter jouw deur staat. Is het beter altijd van deur te veranderen (indien je geen geit wilt)?

Het is beter van deur te wisselen: winst in $\frac{2}{3}$ van de gevallen.

Tellen: combinaties

Vb. Beschouw loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

Tellen: combinaties

Vb. Beschouw loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

Het aantal loten waarin precies één 6 voorkomt is

Tellen: combinaties

Vb. Beschouw loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

Het aantal loten waarin precies één 6 voorkomt is

$$8^4 \cdot 5 = 8^4 \cdot \frac{5!}{4!} = 8^4 \cdot \frac{5!}{(5-1)!}.$$

Tellen: combinaties

Vb. Beschouw loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

Het aantal loten waarin precies één 6 voorkomt is

$$8^4 \cdot 5 = 8^4 \cdot \frac{5!}{4!} = 8^4 \cdot \frac{5!}{(5-1)!}.$$

Het aantal loten waarin precies twee 6-en voorkomen is

Tellen: combinaties

Vb. Beschouw loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

Het aantal loten waarin precies één 6 voorkomt is

$$8^4 \cdot 5 = 8^4 \cdot \frac{5!}{4!} = 8^4 \cdot \frac{5!}{(5-1)!}.$$

Het aantal loten waarin precies twee 6-en voorkomen is

$$8^3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 8^3 \cdot \frac{5!}{3!2!} = 8^3 \cdot \frac{5!}{(5-2)!2!}.$$

Tellen: combinaties

Vb. Beschouw loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

Het aantal loten waarin precies één 6 voorkomt is

$$8^4 \cdot 5 = 8^4 \cdot \frac{5!}{4!} = 8^4 \cdot \frac{5!}{(5-1)!}.$$

Het aantal loten waarin precies twee 6-en voorkomen is

$$8^3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 8^3 \cdot \frac{5!}{3!2!} = 8^3 \cdot \frac{5!}{(5-2)!2!}.$$

Het aantal loten waarin precies drie 6-en voorkomen is

Tellen: combinaties

Vb. Beschouw loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

Het aantal loten waarin precies één 6 voorkomt is

$$8^4 \cdot 5 = 8^4 \cdot \frac{5!}{4!} = 8^4 \cdot \frac{5!}{(5-1)!}.$$

Het aantal loten waarin precies twee 6-en voorkomen is

$$8^3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 8^3 \cdot \frac{5!}{3!2!} = 8^3 \cdot \frac{5!}{(5-2)!2!}.$$

Het aantal loten waarin precies drie 6-en voorkomen is

$$8^2 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 8^2 \cdot \frac{5!}{(5-3)!3!}.$$

Tellen: combinaties

Vb. Beschouw loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

Het aantal loten waarin precies één 6 voorkomt is

$$8^4 \cdot 5 = 8^4 \cdot \frac{5!}{4!} = 8^4 \cdot \frac{5!}{(5-1)!}.$$

Het aantal loten waarin precies twee 6-en voorkomen is

$$8^3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 8^3 \cdot \frac{5!}{3!2!} = 8^3 \cdot \frac{5!}{(5-2)!2!}.$$

Het aantal loten waarin precies drie 6-en voorkomen is

$$8^2 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 8^2 \cdot \frac{5!}{(5-3)!3!}.$$

Vb. Het aantal manieren om een commissie van 4 te kiezen uit een groep van 20 mensen is

Tellen: combinaties

Vb. Beschouw loten bestaande uit 5 cijfers in $\{1, \dots, 9\}$.

Het aantal loten waarin precies één 6 voorkomt is

$$8^4 \cdot 5 = 8^4 \cdot \frac{5!}{4!} = 8^4 \cdot \frac{5!}{(5-1)!}.$$

Het aantal loten waarin precies twee 6-en voorkomen is

$$8^3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 8^3 \cdot \frac{5!}{3!2!} = 8^3 \cdot \frac{5!}{(5-2)!2!}.$$

Het aantal loten waarin precies drie 6-en voorkomen is

$$8^2 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 8^2 \cdot \frac{5!}{(5-3)!3!}.$$

Vb. Het aantal manieren om een commissie van 4 te kiezen uit een groep van 20 mensen is $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!} = \frac{20!}{4!(20-4)!}$.

Tellen: kenmerken

Uit n dingen k dingen pakken:

Tellen: kenmerken

Uit n dingen k dingen pakken:

- Geordend of ongeordend.

Tellen: kenmerken

Uit n dingen k dingen pakken:

- Geordend of ongeordend.
- Met of zonder terugleggen.

Tellen: geordend met terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, met terugleggen, geordend naar de volgorde van het pakken.

Tellen: geordend met terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, met terugleggen, geordend naar de volgorde van het pakken.

De uitkomstenruimte bestaat uit

Tellen: geordend met terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, met terugleggen, geordend naar de volgorde van het pakken.

De uitkomstenruimte bestaat uit rijtjes van 4 ballen.

Tellen: geordend met terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, met terugleggen, geordend naar de volgorde van het pakken.

De uitkomstenruimte bestaat uit rijtjes van 4 ballen.

Het aantal mogelijke uitkomsten is

Tellen: geordend met terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, met terugleggen, geordend naar de volgorde van het pakken.

De uitkomstenruimte bestaat uit rijtjes van 4 ballen.

Het aantal mogelijke uitkomsten is 7^4 .

Tellen: geordend met terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, met terugleggen, geordend naar de volgorde van het pakken.

De uitkomstenruimte bestaat uit rijtjes van 4 ballen.

Het aantal mogelijke uitkomsten is 7^4 .

St. Het aantal manieren om uit n dingen k dingen geordend en met terugleggen te pakken is n^k .

Tellen: geordend zonder terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, zonder terugleggen, geordend naar de volgorde van het pakken.

Tellen: geordend zonder terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, zonder terugleggen, geordend naar de volgorde van het pakken.

De uitkomstenruimte bestaat uit

Tellen: geordend zonder terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, zonder terugleggen, geordend naar de volgorde van het pakken.

De uitkomstenruimte bestaat uit rijtjes van 4 verschillende ballen.

Tellen: geordend zonder terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, zonder terugleggen, geordend naar de volgorde van het pakken.

De uitkomstenruimte bestaat uit rijtjes van 4 verschillende ballen.

Het aantal mogelijke uitkomsten is

Tellen: geordend zonder terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, zonder terugleggen, geordend naar de volgorde van het pakken.

De uitkomstenruimte bestaat uit rijtjes van 4 verschillende ballen.

Het aantal mogelijke uitkomsten is $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!}$.

Tellen: geordend zonder terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, zonder terugleggen, geordend naar de volgorde van het pakken.

De uitkomstenruimte bestaat uit rijtjes van 4 verschillende ballen.

Het aantal mogelijke uitkomsten is $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!}$.

St. Het aantal manieren om uit n dingen k dingen geordend en zonder terugleggen te pakken is $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Tellen: ongeordend zonder terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, zonder terugleggen, en zonder te ordenen naar de volgorde van pakken.

Tellen: ongeordend zonder terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, zonder terugleggen, en zonder te ordenen naar de volgorde van pakken.

De uitkomstenruimte bestaat uit

Tellen: ongeordend zonder terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, zonder terugleggen, en zonder te ordenen naar de volgorde van pakken.

De uitkomstenruimte bestaat uit verzamelingen van 4 ballen.

Tellen: ongeordend zonder terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, zonder terugleggen, en zonder te ordenen naar de volgorde van pakken.

De uitkomstenruimte bestaat uit verzamelingen van 4 ballen.

Het aantal mogelijke uitkomsten is

Tellen: ongeordend zonder terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, zonder terugleggen, en zonder te ordenen naar de volgorde van pakken.

De uitkomstenruimte bestaat uit verzamelingen van 4 ballen.

Het aantal mogelijke uitkomsten is

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = \frac{7!}{4!3 \cdot 2} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7!}{4!(7-4)!}.$$

Tellen: ongeordend zonder terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, zonder terugleggen, en zonder te ordenen naar de volgorde van pakken.

De uitkomstenruimte bestaat uit verzamelingen van 4 ballen.

Het aantal mogelijke uitkomsten is

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = \frac{7!}{4!3 \cdot 2} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7!}{4!(7-4)!}.$$

Merk op: bij geordend pakken zijn 1257 en 2175 verschillende uitkomsten, bij ongeordend pakken niet, want daar gaat om verzamelingen, en $\{1, 2, 5, 7\} = \{2, 1, 7, 5\}$.

Tellen: ongeordend zonder terugleggen

Vb. Uit een vaas met 7 ballen, genummerd 1 tot 7, 4 ballen pakken, zonder terugleggen, en zonder te ordenen naar de volgorde van pakken.

De uitkomstenruimte bestaat uit verzamelingen van 4 ballen.

Het aantal mogelijke uitkomsten is

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = \frac{7!}{4!3 \cdot 2} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7!}{4!(7-4)!}.$$

Merk op: bij geordend pakken zijn 1257 en 2175 verschillende uitkomsten, bij ongeordend pakken niet, want daar gaat om verzamelingen, en $\{1, 2, 5, 7\} = \{2, 1, 7, 5\}$.

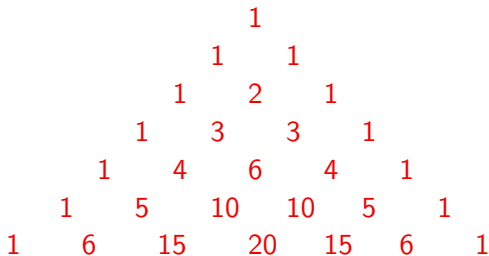
St. Het aantal manieren om uit n dingen k dingen ongeordend en zonder terugleggen te pakken is $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$.

Tellen: faculteit

St. (Stirlings formule)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^n} = \frac{n^n}{e^n} \cdot \sqrt{2n\pi}$$

Tellen: Pascals driehoek en binomiaal coëfficiënten



$$\begin{matrix} i & j \\ i+j \end{matrix}$$



Voorbeelden: loterij

Wat is de kans om bij een loterij met 1000 loten en drie prijzen tenminste 1 prijs te winnen bij het kopen van 5 loten? Wat is de kans om precies 2 prijzen te winnen? Zijn die kansen veel groter dan bij het kopen van 2 loten?

Zij X en Y het aantal gewonnen prijzen bij het kopen van resp. 5 en 2 loten.

Voorbeelden: loterij

Wat is de kans om bij een loterij met 1000 loten en drie prijzen tenminste 1 prijs te winnen bij het kopen van 5 loten? Wat is de kans om precies 2 prijzen te winnen? Zijn die kansen veel groter dan bij het kopen van 2 loten?

Zij X en Y het aantal gewonnen prijzen bij het kopen van resp. 5 en 2 loten. Ongeordend pakken zonder terugleggen.

Voorbeelden: loterij

Wat is de kans om bij een loterij met 1000 loten en drie prijzen tenminste 1 prijs te winnen bij het kopen van 5 loten? Wat is de kans om precies 2 prijzen te winnen? Zijn die kansen veel groter dan bij het kopen van 2 loten?

Zij X en Y het aantal gewonnen prijzen bij het kopen van resp. 5 en 2 loten. Ongeordend pakken zonder terugleggen.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{997}{5}}{\binom{1000}{5}} = 0.015.$$

Voorbeelden: loterij

Wat is de kans om bij een loterij met 1000 loten en drie prijzen tenminste 1 prijs te winnen bij het kopen van 5 loten? Wat is de kans om precies 2 prijzen te winnen? Zijn die kansen veel groter dan bij het kopen van 2 loten?

Zij X en Y het aantal gewonnen prijzen bij het kopen van resp. 5 en 2 loten. Ongeordend pakken zonder terugleggen.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{997}{5}}{\binom{1000}{5}} = 0.015.$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{997}{3} \binom{3}{2}}{\binom{1000}{5}} = 0.00005.$$

Voorbeelden: loterij

Wat is de kans om bij een loterij met 1000 loten en drie prijzen tenminste 1 prijs te winnen bij het kopen van 5 loten? Wat is de kans om precies 2 prijzen te winnen? Zijn die kansen veel groter dan bij het kopen van 2 loten?

Zij X en Y het aantal gewonnen prijzen bij het kopen van resp. 5 en 2 loten. Ongeordend pakken zonder terugleggen.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{997}{5}}{\binom{1000}{5}} = 0.015.$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{997}{3} \binom{3}{2}}{\binom{1000}{5}} = 0.00005.$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{\binom{997}{2}}{\binom{1000}{2}} = 0.006.$$

Voorbeelden: loterij

Wat is de kans om bij een loterij met 1000 loten en drie prijzen tenminste 1 prijs te winnen bij het kopen van 5 loten? Wat is de kans om precies 2 prijzen te winnen? Zijn die kansen veel groter dan bij het kopen van 2 loten?

Zij X en Y het aantal gewonnen prijzen bij het kopen van resp. 5 en 2 loten. Ongeordend pakken zonder terugleggen.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{997}{5}}{\binom{1000}{5}} = 0.015.$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{997}{3} \binom{3}{2}}{\binom{1000}{5}} = 0.00005.$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{\binom{997}{2}}{\binom{1000}{2}} = 0.006.$$

$$P(Y = 2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{1000}{2}} = 0.000006.$$

Voorbeelden: poker

Bij poker krijgt een speler 5 kaarten uit 52. Is de kans op *full house* (3 kaarten met dezelfde waarde en 2 andere met dezelfde waarde) groter dan op *four of a kind* (4 kaarten met dezelfde waarde)?

Voorbeelden: poker

Bij poker krijgt een speler 5 kaarten uit 52. Is de kans op *full house* (3 kaarten met dezelfde waarde en 2 andere met dezelfde waarde) groter dan op *four of a kind* (4 kaarten met dezelfde waarde)? Ongeordend pakken zonder terugleggen.

Voorbeelden: poker

Bij poker krijgt een speler 5 kaarten uit 52. Is de kans op *full house* (3 kaarten met dezelfde waarde en 2 andere met dezelfde waarde) groter dan op *four of a kind* (4 kaarten met dezelfde waarde)? Ongeordend pakken zonder terugleggen.

Het aantal mogelijke delingen is

Voorbeelden: poker

Bij poker krijgt een speler 5 kaarten uit 52. Is de kans op *full house* (3 kaarten met dezelfde waarde en 2 andere met dezelfde waarde) groter dan op *four of a kind* (4 kaarten met dezelfde waarde)? Ongeordend pakken zonder terugleggen.

Het aantal mogelijke delingen is $\binom{52}{5}$.

Voorbeelden: poker

Bij poker krijgt een speler 5 kaarten uit 52. Is de kans op *full house* (3 kaarten met dezelfde waarde en 2 andere met dezelfde waarde) groter dan op *four of a kind* (4 kaarten met dezelfde waarde)? Ongeordend pakken zonder terugleggen.

Het aantal mogelijke delingen is $\binom{52}{5}$.

$$P(\text{four-of-a-kind}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = 0.00024.$$

Voorbeelden: poker

Bij poker krijgt een speler 5 kaarten uit 52. Is de kans op *full house* (3 kaarten met dezelfde waarde en 2 andere met dezelfde waarde) groter dan op *four of a kind* (4 kaarten met dezelfde waarde)? Ongeordend pakken zonder terugleggen.

Het aantal mogelijke delingen is $\binom{52}{5}$.

$$P(\text{four-of-a-kind}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = 0.00024.$$

$$P(\text{full house}) = \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = 0.0014.$$

Tellen: geordend of ongeordend

Soms is zowel geordend als ongeordend pakken een natuurlijke keuze voor de uitkomstenruimte.

Vb. Wat is de kans dat in een groep van 45 mensen tenminste twee mensen op dezelfde dag jarig zijn?

Tellen: geordend of ongeordend

Soms is zowel geordend als ongeordend pakken een natuurlijke keuze voor de uitkomstenruimte.

Vb. Wat is de kans dat in een groep van 45 mensen tenminste twee mensen op dezelfde dag jarig zijn?

Geordend pakken: Het aantal mogelijke verdelingen is 365^{45} . Het aantal mogelijke verdelingen waarbij niemand op dezelfde dag jarig is is $\frac{365!}{(365-45)!}$. De gevraagde kans is

$$\frac{365!}{(365 - 45)! 365^{45}}.$$

Tellen: geordend of ongeordend

Soms is zowel geordend als ongeordend pakken een natuurlijke keuze voor de uitkomstenruimte.

Vb. Wat is de kans dat in een groep van 45 mensen tenminste twee mensen op dezelfde dag jarig zijn?

Geordend pakken: Het aantal mogelijke verdelingen is 365^{45} . Het aantal mogelijke verdelingen waarbij niemand op dezelfde dag jarig is is $\frac{365!}{(365-45)!}$. De gevraagde kans is

$$\frac{365!}{(365 - 45)!365^{45}}.$$

Ongeordend pakken: Het aantal mogelijke verdelingen is $\frac{365^{45}}{45!}$. Het aantal mogelijke verdelingen waarbij niemand op dezelfde dag jarig is is $\frac{365!}{45!(365-45)!}$. De gevraagde kans is

$$\frac{365!45!}{45!(365 - 45)!365^{45}} = \frac{365!}{(365 - 45)!365^{45}}.$$

Tellen: meerdere malen ongeordend pakken

Vb. Uit een groep van 100 mensen worden drie commissies gekozen bestaande uit 20, 11 en 7 mensen. Niemand zit in meer dan één commissie. Het aantal mogelijke commissies is

Tellen: meerdere malen ongeordend pakken

Vb. Uit een groep van 100 mensen worden drie commissies gekozen bestaande uit 20, 11 en 7 mensen. Niemand zit in meer dan één commissie. Het aantal mogelijke commissies is $\binom{100}{20} \binom{80}{11} \binom{69}{7}$.

Tellen: meerdere malen ongeordend pakken

Vb. Uit een groep van 100 mensen worden drie commissies gekozen bestaande uit 20, 11 en 7 mensen. Niemand zit in meer dan één commissie. Het aantal mogelijke commissies is $\binom{100}{20} \binom{80}{11} \binom{69}{7}$.

Merk op: $\binom{100}{20} \binom{80}{11} \binom{69}{7} = \binom{100}{11} \binom{89}{20} \binom{69}{7}$, etc.

Tellen: meerdere malen ongeordend pakken

Vb. Uit een groep van 100 mensen worden drie commissies gekozen bestaande uit 20, 11 en 7 mensen. Niemand zit in meer dan één commissie. Het aantal mogelijke commissies is $\binom{100}{20} \binom{80}{11} \binom{69}{7}$.

Merk op: $\binom{100}{20} \binom{80}{11} \binom{69}{7} = \binom{100}{11} \binom{89}{20} \binom{69}{7}$, etc.

St. Het aantal manieren om uit n dingen na elkaar k_1 , dan k_2 , ..., en dan k_m dingen ongeordend te pakken is

Tellen: meerdere malen ongeordend pakken

Vb. Uit een groep van 100 mensen worden drie commissies gekozen bestaande uit 20, 11 en 7 mensen. Niemand zit in meer dan één commissie. Het aantal mogelijke commissies is $\binom{100}{20} \binom{80}{11} \binom{69}{7}$.

Merk op: $\binom{100}{20} \binom{80}{11} \binom{69}{7} = \binom{100}{11} \binom{89}{20} \binom{69}{7}$, etc.

St. Het aantal manieren om uit n dingen na elkaar k_1 , dan k_2 , ..., en dan k_m dingen ongeordend te pakken is

$$\binom{n}{k_1} \binom{n - k_1}{k_2} \binom{n - k_1 - k_2}{k_3} \cdots \binom{n - k_1 - k_2 - \cdots - k_{m-1}}{k_m}.$$

Finis