

Uitwerking Tussentoets Statistiek

Dinsdag 4 Oktober 2011 9:00 - 12:00

- 1 De regering besluit de subsidie voor 6 van de 16 orkesten die zij tot nu toe subsidiëerde stop te zetten. De 6 orkesten worden willekeurig uit de 16 gekozen. Alle 16 orkesten hebben een dirigent, waarvan er 7 vrouwelijk en 9 mannelijk zijn.

- 1a Wat is de kans dat van de orkesten die geen subsidie meer zullen ontvangen er 2 een vrouwelijke en 4 een mannelijke dirigent hebben?

Antwoord: $\binom{7}{2}\binom{9}{4}/\binom{16}{6}$, omdat er $\binom{16}{6}$ manieren zijn om 6 orkesten uit 16 te kiezen, en $\binom{7}{2}$ manieren om de twee met vrouwelijke dirigent en $\binom{9}{4}$ manieren om de 4 met mannelijke dirigent in die groep te kiezen.

- 1b Als van de orkesten die geen subsidie meer zullen ontvangen er 3 nog een eenmalige toelage ontvangen, wat is de kans dat de orkesten met die toelage alle 3 een vrouwelijke dirigent hebben?

Antwoord: Dit is hetzelfde als 3 orkesten uit 16 kiezen die alle een vrouwelijke dirigent hebben, want de overige 3 doen er niet toe omdat daar niets van geeist wordt: $\binom{7}{3}/\binom{16}{3}$.

Een andere manier om ernaar te kijken, die uiteraard hetzelfde antwoord geeft, is het aantal mogelijkheden sommeren waarop de rest van de 3 orkesten (die die geen vergoeding krijgen) verdeeld is:

$$\frac{\binom{7}{3}\binom{9}{3} + \binom{7}{3}\binom{9}{2}\binom{4}{1} + \binom{7}{3}\binom{9}{1}\binom{4}{2} + \binom{7}{3}\binom{4}{3}}{\binom{16}{6}\binom{6}{3}}$$

Weer een andere manier om ernaar te kijken, die uiteraard hetzelfde antwoord geeft, is dat er eerst een groep van 6 orkesten met minstens 3 vrouwelijke dirigenten wordt gekozen, en uit die groep 3 orkesten met vrouwelijke dirigenten die een vergoeding krijgen:

$$\frac{\binom{7}{3}\binom{9}{3} + \binom{7}{4}\binom{9}{2}\binom{4}{3} + \binom{7}{5}\binom{9}{1}\binom{5}{3} + \binom{7}{6}\binom{6}{3}}{\binom{16}{6}\binom{6}{3}}$$

- 1c Er lekt uit dat onder de slachtoffers tenminste 1 orkest met een mannelijke en 1 orkest met een vrouwelijke dirigent is. Wat is de kans dat er nog een orkest met een vrouwelijke dirigent is dat geen subsidie meer zal ontvangen?

Antwoord: Laat X het aantal orkesten met een vrouwelijke dirigent in die groep van 6 orkesten zijn, en Y het aantal orkesten met een mannelijke dirigent in de groep. Er wordt gevraagd naar de kans

$$P(X \geq 2 \text{ en } Y \geq 1 \mid X \geq 1 \text{ en } Y \geq 1).$$

Er geldt

$$P(X \geq 2 \text{ en } Y \geq 1 \mid X \geq 1 \text{ en } Y \geq 1) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{P((X \geq 2 \text{ en } Y \geq 1) \cap (X \geq 1 \text{ en } Y \geq 1))}{P(X \geq 1 \text{ en } Y \geq 1)} = \\ & \frac{P(X \geq 2 \text{ en } Y \geq 1)}{1 - P(X = 0 \text{ of } Y = 0)} = \frac{P(X \geq 2 \text{ en } Y \geq 1)}{1 - P(X = 0) - P(Y = 0)} = \\ & \frac{\sum_{i=2}^5 \binom{7}{i} \binom{9}{6-i}}{\binom{16}{6}} / \left(1 - \frac{\binom{9}{6}}{\binom{16}{6}} - \frac{\binom{7}{6}}{\binom{16}{6}}\right). \end{aligned}$$

- 1d Om het zware weer het hoofd te kunnen bieden verdelen de 6 slachtoffers zich in 2 groepen van 3 die elk fuseren tot een nieuw orkest. De verdeling is willekeurig. Wat is de kans dat tenminste 1 van de 2 nieuwe orkesten bestaat uit 3 voormalige orkesten die voor de fusie een vrouwelijke dirigent hadden?

Antwoord:

Ook hier zijn meerdere zienswijzen mogelijk. In een daarvan bestaat de uitkomstenruimte uit paren $\langle x, y \rangle$, waarbij x en y beide verzamelingen van drie orkesten zijn. Dan is de grootte van de uitkomstenruimte $\binom{16}{6} \binom{6}{3}$. En de gevraagde kans is

$$\frac{2 \binom{7}{3} \binom{9}{3} + 2 \binom{7}{4} \binom{9}{2} \binom{4}{1} + 2 \binom{7}{3} \binom{9}{1} \binom{4}{2} + \binom{7}{6} \binom{6}{3}}{\binom{16}{6} \binom{6}{3}}.$$

De “maal 2” is omdat de uitkomstenruimte uit paren bestaat. Dat de laatste factor niet maal 2 moet is omdat het daar om een paar van tweemaal drie orkesten met een vrouwelijke dirigent gaat.

Ook kan als uitkomstenruimte genomen worden alle verzamelingen $\{x, y\}$ waarbij x en y zelf beide verzamelingen van drie orkesten zijn. De grootte van de uitkomstenruimte is dan $\binom{16}{6} \binom{6}{3} / 2$. En de gevraagde kans is

$$\frac{\binom{7}{3} \binom{9}{3} + \binom{7}{4} \binom{9}{2} \binom{4}{1} + \binom{7}{3} \binom{9}{1} \binom{4}{2} + \frac{1}{2} \binom{7}{6} \binom{6}{3}}{\frac{1}{2} \binom{16}{6} \binom{6}{3}}.$$

- 2 In het casino speelt ene meneer A. een spel waarbij bij elke ronde zijn kans om te winnen 0.4 is. Om een ronde te spelen moet hij €1 betalen, en als hij wint ontvangt hij €5. Als hij bij n maal spelen k maal wint is zijn winst dus $\text{€}(5k - n)$.

- 2a Wat is de kans dat na 10 maal spelen zijn winst €5 is?

Antwoord: 10 spelen kosten hem €10, dus hij moet voor een winst van €5 3 keer winnen. De kans daarop (dit is een binomiale verdeling): $\binom{10}{3} (0.4)^3 (0.6)^7$.

- 2b Meneer A. stopt met spelen als hij na 20 maal spelen geen positieve (groter dan 0) winst heeft. Wat is de kans dat hij na twintig maal spelen stopt?

Antwoord: 20 spelen kosten hem €20, dus hij kan hoogstens 4 maal gewonnen hebben gedurende die 20 maal. De gevraagde kans is dus de kans dat hij hoogstens 4 maal wint, d.w.z. 0 of 1 of 2 of 3 of 4 maal wint:

$$\sum_{i=0}^4 \binom{20}{i} (0.4)^i (0.6)^{20-i}.$$

- 3 Het aantal mensen dat per dag een zekere website bezoekt wordt gemodelleerd door een continue stochast X met kansdichtheid

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2e^{-2x}.$$

$P(a \leq X \leq b)$ is de kans het aantal mensen dat de site per dag bezoekt in het interval $[a, b]$ ligt. Gegeven is dat de primitieve van de functie $2e^{-2x}$ de functie $-e^{-2x}$ is.

- 3a Is de verdeling van de stochast X uniform?

Antwoord: Nee de stochast is niet uniform want de kansdichtheid is niet constant, bijvoorbeeld $f(0) = 2$ en $f(1) = \frac{2}{e^2} < 2$.

- 3b Wat is de kans dat het aantal mensen dat de site per dag bezoekt groter dan 7 is?

Antwoord: De gevraagde kans is

$$P(X > 7) = \int_7^{\infty} f(x) dx = -e^{-2x} \Big|_7^{\infty} = e^{-14} = \frac{1}{e^{14}}.$$

- 3c Stel dat $[a, b]$ en $[c, d]$ twee intervallen in het domein van f zijn en dat de lengte van het eerste kleiner is dan de lengte van het tweede. Beschouw de kans dat het aantal mensen dat de site per dag bezoekt in het eerste interval ligt. Is die kans kleiner dan voor het tweede interval?

Antwoord: Nee. f is een sterk dalende functie, en er geldt bijvoorbeeld dat $P(0 \leq X \leq 1) < P(4 \leq X \leq 6)$, terwijl de lengte van $[0, 1]$ kleiner is dan van $[4, 6]$.

- 4 Leg in maximaal 5 zinnen uit waarom uit de axioma's van de kansrekening volgt dat als een eindige uitkomstenruimte uit n ($n \in \mathbb{N}_{>0}$) elementen bestaat die alle gelijke kans hebben, de kans op elk element $\frac{1}{n}$ is.

Antwoord: Laten $A_1, \dots, A_n$ de elementen in de uitkomstenruimte zijn, en dus onderling disjunct, en laat p de kans op A_i zijn. Een axioma van de kansrekening zegt dat $P(S) = 1$, dus geldt $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1$ omdat $S = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Een ander axioma zegt dat omdat $A_1, \dots, A_n$ onderling disjunct zijn geldt dat $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$. Daaruit volgt dat $1 = \sum_{i=1}^n P(A_i) = np$. Hieruit volgt dat $p = 1/n$.