

1 Uitwerking van de opgaven over Bayesiaans leren

1. Laat E de gebeurtenis zijn dat er onder de 50 willekeurige loten precies 1 prijs is. Omdat de verdeling van de a-priori hypotheses uniform is wordt de stelling van Bayes voor de a-posteriori hypotheses:

$$P(H_i | E) = \frac{P(E | H_i)}{P(E | H_1) + P(E | H_2) + P(E | H_3)}.$$

De likelihoods zijn:

$$P(E | H_1) = \frac{\binom{99}{49}}{\binom{100}{50}} \quad P(E | H_2) = \frac{\binom{2}{1} \binom{98}{49}}{\binom{100}{50}} \quad P(E | H_3) = \frac{\binom{3}{1} \binom{97}{49}}{\binom{100}{50}}.$$

Deze getallen invullen in bovenstaande formule van Bayes geeft de a-posteriori waarschijnlijkheden $P(H_1 | E)$, $P(H_3 | E)$ en $P(H_3 | E)$.

Hypothese H_i zou (a-posteriori) verworpen worden wanneer er $i + 1$ of meer prijzen onder de 50 loten zijn.

2. Laat E de gebeurtenis zijn dat er m maal achter elkaar K gegooid is. Dan geldt:

$$P(E | H_1) = \left(\frac{1}{10}\right)^m \quad P(E | H_2) = \left(\frac{1}{5}\right)^m \quad P(E | H_3) = \left(\frac{8}{9}\right)^m.$$

Een van de stellingen die behandeld zijn bij Bayesiaans leren (zie slides) was dat bij een uniforme verdeling van de a-priori waarschijnlijkheden het volgende geldt:

$$\frac{P(H_i | E)}{P(H_j | E)} = \frac{P(E | H_i)}{P(E | H_j)}.$$

Gevraagd wordt dus hoe groot m minimaal moet zijn zodat geldt:

$$\frac{\left(\frac{8}{9}\right)^m}{\left(\frac{1}{10}\right)^m} \geq 8 \quad \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^m}{\left(\frac{1}{5}\right)^m} \geq 8.$$

Dat is verder gewoon uit te rekenen: m moet minimaal 2 zijn.

3. Omdat de verdeling van de a-priori hypotheses uniform is wordt de stelling van Bayes voor de a-posteriori hypotheses:

$$P(H_i | E) = \frac{P(E | H_i)}{P(E | H_1) + P(E | H_2)}.$$

Dus het absolute verschil tussen de a-posteriori waarschijnlijkheden van H_1 en H_2 is het absolute verschil tussen de likelihoods gedeeld door hun som:

$$\frac{|P(E | H_1) - P(E | H_2)|}{P(E | H_1) + P(E | H_2)}.$$

De likelihoods voor de verschillende uitkomsten van het experiment zijn:

$$P(2K \mid H_1) = \frac{1}{36} \quad P(2K \mid H_2) = \frac{4}{9} \quad P(0K \mid H_1) = \frac{25}{36} \quad P(0K \mid H_2) = \frac{1}{9}$$

$$P(1K \mid H_1) = \frac{10}{36} \quad P(1K \mid H_2) = \frac{4}{9}.$$

Het absolute verschil tussen de a-posteriori waarschijnlijkheden van H_1 en H_2 is kleiner dan $\frac{1}{2}$ bij de gebeurtenissen $2K$ en $1K$. De kans op die gebeurtenissen is $\frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

Zoals uit de likelihoods blijkt is er geen uitkomst van het experiment waarbij de a-posteriori waarschijnlijkheden uniform verdeeld zijn. De kans daarop is dus 0.

4. De stelling van Bayes zegt:

$$P(H_i \mid E) = \frac{P(E \mid H_i)P(H_i)}{P(E \mid H_1)P(H_1) + P(E \mid H_2)P(H_2)}.$$

Als de a-priori waarschijnlijkheden van de hypotheses uniform verdeeld zijn, zijn de getallen $P(H_1)$ en $P(H_2)$ gelijk, en vallen daarom in de formule tegen elkaar weg. Daarmee wordt de formule

$$P(H_i \mid E) = \frac{P(E \mid H_i)}{P(E \mid H_1) + P(E \mid H_2)}.$$

Dus als $P(E \mid H_1) = 2P(E \mid H_2)$, dan volgt

$$\frac{P(H_1 \mid E)}{P(H_2 \mid E)} = \frac{P(E \mid H_1)}{P(E \mid H_2)} = \frac{2P(E \mid H_2)}{P(E \mid H_2)} = 2,$$

en dat is wat er bewezen moest worden.