Logische Complexiteit

VI : Meer over Context-Vrije Talen

Jeroen Goudsmit
Universiteit Utrecht
donderdag 23 februari 2012

Vandaag

Greibach
Normaalvorm

Vandaag

Greibach Normaalvorm

Nette PDA's

Vandaag

Greibach Normaalvorm

Nette PDA's

Myhill–Nerode

Vandaag

Greibach Normaalvorm

Nette PDA's

Myhill–Nerode

Pomplemma

Chomsky Normaalvorm

Elke regel is van de vorm

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &\rightarrow \mathrm{B\ C} \\ \mathrm{A} &\rightarrow x \\ \mathrm{S} &\rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

Chomsky Normaalvorm

Elke regel is van de vorm

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B\ C \\ A & \rightarrow & x \\ S & \rightarrow & \varepsilon \end{array}$$

B en C zijn niet S

Greibach Normaalvorm

Elke regel is van de vorm

$$\begin{array}{rcl} A & \rightarrow & x\,B_1 \ldots B_n \\ S & \rightarrow & \varepsilon \end{array}$$

Greibach Normaalvorm

Elke regel is van de vorm

$$\begin{aligned} A &\rightarrow x\, B_1 \ldots B_n \\ S &\rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

$B_1, \ldots, B_n$ zijn niet S

Voorbeeld

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{E} & \rightarrow & a\ \mathrm{C}\ \mathrm{a} \mid b\ \mathrm{C}\ \mathrm{b} \mid \varepsilon \\
\mathrm{C} & \rightarrow & \mathrm{C}\ \mathrm{C} \mid a \mid b \mid \varepsilon
\end{array}
$$

Voorbeeld

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{S} & \rightarrow & \mathrm{E} \\
\mathrm{E} & \rightarrow & a\ \mathrm{C}\ \mathrm{a} \mid b\ \mathrm{C}\ \mathrm{b} \mid \varepsilon \\
\mathrm{C} & \rightarrow & \mathrm{C}\ \mathrm{C} \mid a \mid b \mid \varepsilon
\end{array}
$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned} S &\rightarrow E \\ E &\rightarrow a\ C\ A \mid b\ C\ B \mid \varepsilon \\ C &\rightarrow C\ C \mid a \mid b \mid \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

Voorbeeld

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S} &\rightarrow \mathrm{E} \mid \varepsilon \\
\mathrm{E} &\rightarrow a\ \mathrm{C}\ \mathrm{A} \mid b\ \mathrm{C}\ \mathrm{B} \mid \mathrm{a}\ \mathrm{A} \mid b\ \mathrm{B} \\
\mathrm{C} &\rightarrow \mathrm{C}\ \mathrm{C} \mid a \mid b \mid \mathrm{C}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} &\rightarrow a \\
\mathrm{B} &\rightarrow b
\end{aligned}
$$

Voorbeeld

$$
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & E \mid \varepsilon \\
E & \rightarrow & a\ C\ A \mid b\ C\ B \mid \mathrm{a}\ A \mid b\ B \\
C & \rightarrow & C\ C \mid a \mid b
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
A & \rightarrow & a \\
B & \rightarrow & b
\end{array}
$$

Voorbeeld

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{S} & \to & \mathrm{E} \mid \varepsilon \\
\mathrm{E} & \to & a\ \mathrm{C}\ \mathrm{A} \mid b\ \mathrm{C}\ \mathrm{B} \mid \mathrm{a}\ \mathrm{A} \mid b\ \mathrm{B} \\
\mathrm{C} & \to & a \mid b \mid a\ \underline{\mathrm{C}} \mid b\ \underline{\mathrm{C}} \\
\underline{\mathrm{C}} & \to & \mathrm{C} \\
\underline{\mathrm{C}} & \to & \mathrm{C}\ \underline{\mathrm{C}} \\
\mathrm{A} & \to & a \\
\mathrm{B} & \to & b
\end{array}
$$

Voorbeeld

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & a\ C\ A \mid b\ C\ B \mid a\ A \mid b\ B \mid \varepsilon \\
E & \rightarrow & a\ C\ A \mid b\ C\ B \mid \mathrm{a}\ A \mid b\ B \\
C & \rightarrow & a \mid b \mid a\ \underline{C} \mid b\ \underline{C} \\
\underline{C} & \rightarrow & C \\
\underline{C} & \rightarrow & C\ \underline{C} \\
A & \rightarrow & a \\
B & \rightarrow & b
\end{array}
$$

Voorbeeld

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S} &\rightarrow a\ \mathrm{C}\ \mathrm{A} \mid b\ \mathrm{C}\ \mathrm{B} \mid a\ \mathrm{A} \mid b\ \mathrm{B} \mid \varepsilon \\
\mathrm{E} &\rightarrow a\ \mathrm{C}\ \mathrm{A} \mid b\ \mathrm{C}\ \mathrm{B} \mid \mathrm{a}\ \mathrm{A} \mid b\ \mathrm{B} \\
\mathrm{C} &\rightarrow a \mid b \mid a\ \underline{\mathrm{C}} \mid b\ \underline{\mathrm{C}} \\
\underline{\mathrm{C}} &\rightarrow a \mid b \mid a\ \underline{\mathrm{C}} \mid b\ \underline{\mathrm{C}} \\
\underline{\mathrm{C}} &\rightarrow a\ \underline{\mathrm{C}} \mid b\ \underline{\mathrm{C}} \mid a\ \underline{\mathrm{C}}\ \underline{\mathrm{C}} \mid b\ \underline{\mathrm{C}}\ \underline{\mathrm{C}} \\
\mathrm{A} &\rightarrow a \\
\mathrm{B} &\rightarrow b
\end{aligned}
$$

Voorbeeld

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & a\ C\ A \mid b\ C\ B \mid a\ A \mid b\ B \mid \varepsilon \\
E & \rightarrow & a\ C\ A \mid b\ C\ B \mid \mathrm{a}\ A \mid b\ B \\
C & \rightarrow & a \mid b \mid a\ \underline{C} \mid b\ \underline{C} \\
\underline{C} & \rightarrow & a \mid b \mid a\ \underline{C} \mid b\ \underline{C} \\
\underline{C} & \rightarrow & a\ \underline{C} \mid b\ \underline{C} \mid a\ \underline{C}\ \underline{C} \mid b\ \underline{C}\ \underline{C} \\
A & \rightarrow & a \\
B & \rightarrow & b
\end{array}
$$

Schoonmaken

Elke PDA is equivalent aan een PDA die enkel accepteert met lege stack

Nette PDA's

Definitie
Een nette PDA accepteert een woord alleen als de stack leeg is.

Stelling
Elke nette PDA is equivalent aan een gewone PDA.

Myhill–Nerode

$$\mathcal{L}_1 = \{\, w \in \Sigma^* \mid w \text{ heeft evenveel } a\text{'s als } b\text{'s} \,\}$$

$$\mathcal{L}_2 = \{\, ww \mid w \in \Sigma^* a \,\}$$

$$\mathcal{L}_3 = \{\, a^k b^l c^m \mid \text{ als } k = 1 \text{ dan } l = m \,\}$$

Taal $\mathcal{L}_1$

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \, w \in \Sigma^* \;\middle|\; w \text{ heeft evenveel } a\text{'s als } b\text{'s} \, \right\}$$

Taal $\mathcal{L}_1$

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \; w \in \Sigma^* \;\middle|\; w \text{ heeft evenveel } a\text{'s als } b\text{'s} \; \right\}$$

$$a \not\equiv aa$$

Taal $\mathcal{L}_1$

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \, w \in \Sigma^* \;\middle|\; w \text{ heeft evenveel } a\text{'s als } b\text{'s} \, \right\}$$

$$a \not\equiv aa$$

$$a^i \equiv a^j \text{ dan en slechts dan als } i = j$$

Taal $\mathcal{L}_2$

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ \, ww \;\middle|\; w \in \Sigma^* \, \right\}$$

Taal $\mathcal{L}_2$

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ \, ww \;\middle|\; w \in \Sigma^* \, \right\}$$

$$ab \not\equiv abb$$

Taal $\mathcal{L}_2$

$$\mathcal{L}_2 = \{\ ww \mid w \in \Sigma^*\ \}$$

$$ab \not\equiv abb$$

$ab^i \equiv ab^j$ dan en slechts dan als $i = j$

Taal $\mathcal{L}_3$

$$\mathcal{L}_3 = \left\{ \, a^k b^l c^m \;\middle|\; \text{als } k = 1 \text{ dan } l = m \, \right\}$$

Taal $\mathcal{L}_3$

$$\mathcal{L}_3 = \left\{ \, a^k b^l c^m \;\middle|\; \text{als } k = 1 \text{ dan } l = m \, \right\}$$

$$ab \not\equiv abb$$

Taal $\mathcal{L}_3$

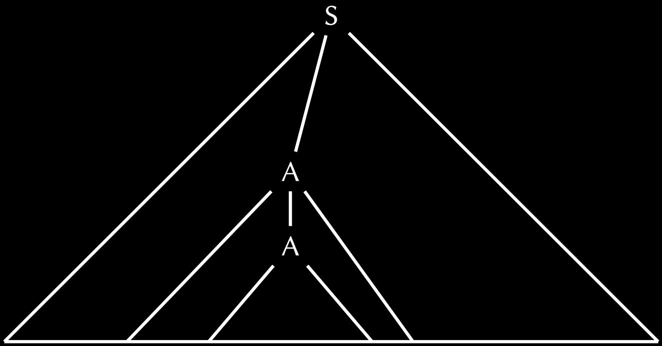
$$\mathcal{L}_3 = \left\{\ a^k b^l c^m \;\middle|\; \text{als } k = 1 \text{ dan } l = m\ \right\}$$

$$ab \not\equiv abb$$

$$ab^i \equiv ab^j \text{ dan en slechts dan als } i = j$$

Pomplemma

Pomplemma



The Wrath of Pomplemma

Lemma
Voor iedere context-vrije taal $\mathcal{L}$ is er een getal p zodat elk woord $s \in \mathcal{L}$ met $|s| \geq p$ gesplitst kan worden als $s = uvxyz$, en

1. *voor alle $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in \mathcal{L}$;*
2. *$|vy| \geq 1$;*
3. *$|vxy| \leq p$.*

Voorbeeld

$$\mathcal{L} = \{\ a^n \mid n \text{ is priem }\}$$

Voorbeeld

$$\mathcal{L} = \{ \ a^n \mid n \text{ is priem } \}$$

Stel $\mathcal{L}$ is context-vrij.

Voorbeeld

$$\mathcal{L} = \{\ a^n \mid n \text{ is priem }\}$$

Stel $\mathcal{L}$ is context-vrij. Wegens het pomplemma hebben we pomplengte p.

Voorbeeld

$$\mathcal{L} = \{\ a^n \mid n \text{ is priem }\}$$

Stel $\mathcal{L}$ is context-vrij. Wegens het pomplemma hebben we pomplengte p. Neem n priem groter dan p en bekijk $w = a^n$.

Voorbeeld

$$\mathcal{L} = \{\ a^n \mid n \text{ is priem }\}$$

Stel $\mathcal{L}$ is context-vrij. Wegens het pomplemma hebben we pomplengte p. Neem n priem groter dan p en bekijk $w = a^n$. Zie $|w| = n \geq p$ en $w \in \mathcal{L}$, dus nu zijn er $x, u, y, v, z \in \Sigma^*$ zó dat $xuyvz = w$, $xu^i yv^i z \in \mathcal{L}$ voor alle i, $|uv| \geq 1$ en $|uyv| \leq p$.

Voorbeeld

$$\mathcal{L} = \{\ a^n \mid n \text{ is priem }\}$$

Stel $\mathcal{L}$ is context-vrij. Wegens het pomplemma hebben we pomplengte p. Neem n priem groter dan p en bekijk $w = a^n$. Zie $|w| = n \geq p$ en $w \in \mathcal{L}$, dus nu zijn er $x, u, y, v, z \in \Sigma^*$ zó dat $xuyvz = w$, $xu^iyv^iz \in \mathcal{L}$ voor alle i, $|uv| \geq 1$ en $|uyv| \leq p$. Schrijf $x = a^{\underline{x}}$, $u = a^{\underline{u}}$, enz. We weten $xu^{n+1}yv^{n+1}z \in \mathcal{L}$. Reken:

$$\begin{aligned}
|xu^{n+1}yv^{n+1}z| &= \underline{x} + (n+1)\cdot\underline{u} + \underline{y} + (n+1)\cdot\underline{v} + \underline{z} \\
&= \underline{x} + \underline{u} + \underline{y} + \underline{v} + \underline{z} + n\cdot(\underline{u} + \underline{v}) \\
&= n + (\underline{u} + \underline{v})\cdot n = n\cdot(\underline{u} + \underline{v} + 1)
\end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\mathcal{L} = \{\ a^n \mid n \text{ is priem }\}$$

Stel $\mathcal{L}$ is context-vrij. Wegens het pomplemma hebben we pomplengte p. Neem n priem groter dan p en bekijk $w = a^n$. Zie $|w| = n \geq p$ en $w \in \mathcal{L}$, dus nu zijn er $x, u, y, v, z \in \Sigma^*$ zó dat $xuyvz = w$, $xu^iyv^iz \in \mathcal{L}$ voor alle i, $|uv| \geq 1$ en $|uyv| \leq p$. Schrijf $x = a^{\underline{x}}$, $u = a^{\underline{u}}$, enz. We weten $xu^{n+1}yv^{n+1}z \in \mathcal{L}$. Reken:

$$\begin{aligned} |xu^{n+1}yv^{n+1}z| &= \underline{x} + (n+1) \cdot \underline{u} + \underline{y} + (n+1) \cdot \underline{v} + \underline{z} \\ &= \underline{x} + \underline{u} + \underline{y} + \underline{v} + \underline{z} + n \cdot (\underline{u} + \underline{v}) \\ &= n + (\underline{u} + \underline{v}) \cdot n = n \cdot (\underline{u} + \underline{v} + 1) \end{aligned}$$

Omdat $xu^{p+1}yv^{p+1}z \in \mathcal{L}$, moet $n \cdot (\underline{u} + \underline{v} + 1)$ priem zijn.

Voorbeeld

$$\mathcal{L} = \{\ a^n \mid n \text{ is priem }\}$$

Stel $\mathcal{L}$ is context-vrij. Wegens het pomplemma hebben we pomplengte p. Neem n priem groter dan p en bekijk $w = a^n$. Zie $|w| = n \geq p$ en $w \in \mathcal{L}$, dus nu zijn er $x, u, v, y, z \in \Sigma^*$ zó dat $xuyvz = w$, $xu^iyv^iz \in \mathcal{L}$ voor alle i, $|uv| \geq 1$ en $|uyv| \leq p$. Schrijf $x = a^{\underline{x}}$, $u = a^{\underline{u}}$, enz. We weten $xu^{n+1}yv^{n+1}z \in \mathcal{L}$. Reken:

$$\begin{aligned} |xu^{n+1}yv^{n+1}z| &= \underline{x} + (n+1)\cdot\underline{u} + \underline{y} + (n+1)\cdot\underline{v} + \underline{z} \\ &= \underline{x} + \underline{u} + \underline{y} + \underline{v} + \underline{z} + n\cdot(\underline{u} + \underline{v}) \\ &= n + (\underline{u} + \underline{v})\cdot n = n\cdot(\underline{u} + \underline{v} + 1) \end{aligned}$$

Omdat $xu^{p+1}yv^{p+1}z \in \mathcal{L}$, moet $n \cdot (\underline{u} + \underline{v} + 1)$ priem zijn. Dit kan alleen als $\underline{u} + \underline{v} = 0$, tegenspraak.

Gezien

Context-vrije Talen

Gezien

Context-vrije Talen

Grammatica

Automaat

Gezien

Context-vrije Talen

Grammatica

CFG

Automaat

PDA

Gezien

Context-vrije Talen

Grammatica	Automaat
CFG	PDA
Chomsky Normaalvorm	Lang
Greibach Normaalvorm	Netjes

Gezien

Context-vrije Talen

Grammatica

CFG
Chomsky Normaalvorm
Greibach Normaalvorm

Automaat

PDA
Lang
Netjes

Pomplemma