

Logische Complexiteit

Onbeslisbare talen

Jeroen Goudsmit

dinsdag 20 maart

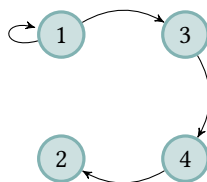
Deze inleveropgave bestaat uit Opgave 1, 2 en 3. Uit 3 moet je minstens *twee onderdelen* beantwoorden, de rest is bonus. Bij het beantwoorden van die twee onderdelen kun je gebruik maken van alle voorgaande onderdelen. De laatste onderdelen zijn (een stuk) gemakkelijker dan de eerste. Beargumenteer je antwoorden, maar houd de uitleg *kort en helder*.

Opgave 1 — Lussen

In deze opgave gaan we kijken naar een taal van coderingen van grafen. Voor de handzaamheid, eerst een definitie.

Definitie 1 (Graaf). Een (gerichte) graaf is een paar $\langle V, E \rangle$ van eindige verzamelingen. We noemen V de verzameling der *knopen* en E de verzameling der *pijlen*. Elementen van E zijn paren van elementen van V .

Een klein voorbeeld geven we hieronder. Links is de graaf getekend, en rechts staat zijn formele definitie. Merk op dat er een lus is van knoop 1 naar knoop 1. Als er een pijl was van 2 naar 3 was, dan was er ook een lus $3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$.



$$\langle \{1, 2, 3, 4\}, \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \} \rangle$$

Bewijs dat de volgende taal beslisbaar is.

$$\text{Lus} := \{ \langle G \rangle \mid G \text{ is een graaf met een lus} \}$$

Opgave 2 — Dubbelen

Beschouw de hieronder gedefinieerde taal. Bewijs of deze taal beslisbaar of juist onbeslisbaar is. Hint: geef een beslisser of een reductie.

$$\text{Dub} := \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is een TM en accepteert enkel woorden van even lengte} \}$$

Opgave 3 — Oneindigheid

Gegeven een CFG $G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$ kun je je afvragen of de taal van G oneindig is. Het doel van deze opgave is om aan te tonen dat de onderstaande taal beslisbaar is.

$$\text{Oneindig}_{\text{CFG}} := \{ \langle G \rangle \mid G \text{ is een CFG met oneindige taal} \}$$

Neem voor het gemak aan dat G is gegeven in Chomsky normaalvorm. Ook is elke variabele nuttig. Met andere woorden, voor elke variabele A zijn er woorden $u, v, w \in \Sigma^*$ zodat $S \xRightarrow{*} u A v \xRightarrow{*} w$. Dit garandeert dus in het bijzonder dat elke variabele een woord over Σ genereert, en dat elke variabele gebruikt kan worden in een afleiding beginnend in S .

- (a) Bewijs dat als $A \xRightarrow{*} u A v$ voor een zekere variabele A en $u, v \in \Sigma^*$ met $|uv| \geq 1$, dat dan $\mathcal{L}(G)$ oneindig is.

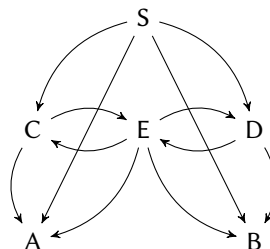
Uit de regels van G en de variabelen maken we een graaf H . De knopen van deze graaf zijn de variabelen V . Per paar variabelen A en B maken we een pijl van A naar B enkel en alleen als er een regel bestaat in R waar A links staat en B rechts voorkomt.

- (b) Laat zien dat de taal van G oneindig is indien de graaf H een lus heeft.

Stel dat H eindig is. Per variabele A kunnen we een getal $\underline{A}$ definiëren, namelijk het langste pad in H wat begint in A . Omdat H eindig is en geen lussen bevat zijn er maar eindig veel paden, dus zo'n getal bestaat. Merk op dat als $A \Rightarrow BC$ een regel is, dan moet $\underline{A}$ strikt groter zijn dan $\underline{B}$ en $\underline{C}$.

- (c) Neem A een willekeurige variabele uit V . Bewijs dat als $A \xRightarrow{*} w$ en $w \in \Sigma^*$, dan is de lengte van w kleiner of gelijk aan $2^{\underline{A}}$. Hint: bewijs dit met inductie langs het aantal stappen in de afleiding van $A \Rightarrow w$.
- (d) Bewijs dat $\mathcal{L}(G)$ eindig is dan en slechts dan wanneer H geen lussen heeft.
- (e) Bewijs dat $\text{Oneindig}_{\text{CFG}}$ beslisbaar is. Je mag hier gebruiken dat het omzetten van gewone CFG naar CFG in Chomsky-Normalvorm met enkel nuttige variabelen gedaan kan worden door een TM.

Als voorbeeld, hieronder de grammatica voor palindromen in Chomsky-normalvorm en daar naast de bijbehorende graaf.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AC \mid BD \\ S &\rightarrow \varepsilon \\ E &\rightarrow AC \mid BD \\ C &\rightarrow EA \\ D &\rightarrow EB \\ S &\rightarrow a \mid b \\ E &\rightarrow a \mid b \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$


We weten dat $E \Rightarrow AC \Rightarrow AEA$, en er is een lus die begint in E . Natuurlijk is de taal van deze grammatica oneindig, want $S \xRightarrow{*} a E a \xRightarrow{*} a^{n+1} E a^{n+1} \xRightarrow{*} a^{2n+3}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Een ander voorbeeld is de onderstaande grammatica en zijn bijbehorende graaf. Hier zien we dat $\underline{S} = 3$, en inderdaad zien we dat het langste woord wat S genereert, $S \Rightarrow A^2 \xRightarrow{*} (BC)^2 \xRightarrow{*} C^6 \xRightarrow{*} c^6$, hooguit $2^{\underline{S}} = 8$ lang is.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AA \\ A &\rightarrow BC \\ B &\rightarrow CC \\ B &\rightarrow a \\ C &\rightarrow c \end{aligned}$$
