

Logische Complexiteit

Turing machines

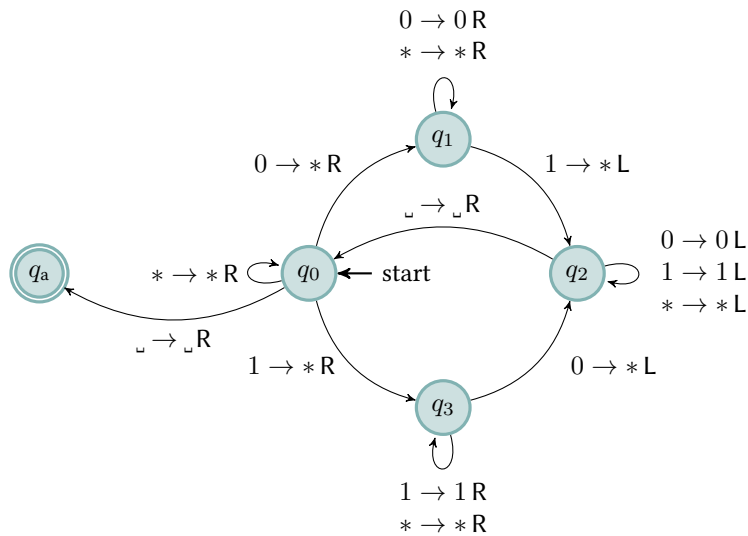
Jeroen Goudsmit

dinsdag 13 maart

Deze inleveropgave bestaat uit Opgave 1 en 2. Er is deze keer geen bonus onderdeel. Beargumenteer je antwoorden, maar houd de uitleg *kort en helder*.

Opgave 1 — Minder symbolen

Bekijk de onderstaande TM over het alfabet $\Sigma = \{0, 1\}$, met tape-alfabet $\Gamma = \{0, 1, *\}$. We willen deze automaat omzetten naar een automaat met een kleiner tape-alfabet. Deze machine werkt op een tape die oneindig is naar beide kanten toe, en in de beginsituatie zit de leeskop op het eerste teken van het ingevoerde woord.



- (i) Geef aan welke van de volgende woorden geaccepteerd worden door de TM: "0110", "1110" en ε .
- (ii) Geef de taal van deze TM.
- (iii) Geef een equivalente TM over het tape-alfabet $\Gamma = \{0, 1\}$.

Opgave 2 — Volgorde

Neem een alfabet Σ . Omdat Σ eindig is kunnen we altijd een lineaire ordening $\leq \subseteq \Sigma \times \Sigma$ kiezen. Herinner je dat de *lexicografische ordening* op Σ^* dan gegeven is door het onderstaande. In het boek wordt dit ook uitgelegd op pagina 14.¹

$$w_1 \dots w_n \leq v_1 \dots v_m \iff n < m \text{ of } "w_1 < v_1 \text{ óf } w_1 = v_1 \text{ en } w_2 \dots w_n \leq v_2 \dots v_m"$$

Als voorbeeld, neem het alfabet $\{a < e < l < p < s\}$. Nu geldt het onderstaande. Overtuig jezelf er eerst van dat er per woord altijd maar eindig veel woorden kleiner zijn dan dat woord.

$$a < p < aap < sap < appel < lepel < appelsap.$$

Stel nu dat M een opsommer is over een willekeurig alfabet Σ . Bekijk nu de onderstaande TM.

N = "Op invoer w :

1. Simuleer M . Per woord v wat ze print, doe het volgende.
2. Als $v = w$, *accepteer*.
3. Als $v > w$, *wijs af*.

- (i) Bewijs dat N een beslisser is, indien M woorden in lexicografische volgorde uitprint.
- (ii) Bewijs dat de taal van M beslisbaar is indien M woorden in lexicografische volgorde uitprint.
- (iii) Bewijs het volgende: "Een taal is beslisbaar dan en slechts dan als er een opsommer is die de taal in lexicografische volgorde opsomt."

¹Merk op dat de relatie $\leq \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ hier recursief gedefinieerd is, en natuurlijk gebruik maakt van de relatie $\leq \subseteq \Sigma \times \Sigma$. Met $<$ bedoelen we hier natuurlijk de relatie gedefinieerd door $x < y$ precies als $x \leq y$ en $x \neq y$.