

Logische Complexiteit

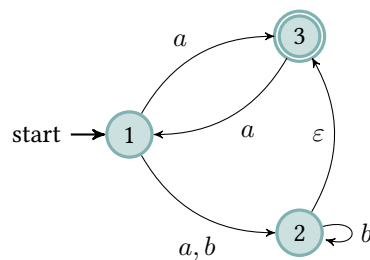
Jeroen Goudsmit

dinsdag 14 februari

Deze inleveropgave bestaat uit Opgave 1, 2 en 3, met een bonusonderdeel Opgave 4. De bonusopgave is zeker de moeite waard om te proberen. Beargumenteer je antwoorden, maar houd de uitleg *kort en helder*.

Opgave 1 — Nondeterminisme

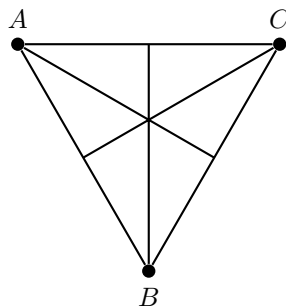
De automaat hieronder is een NFA in het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$. Maak een DFA die dezelfde taal herkent, en doe dit zoals aangegeven in het boek.



Opgave 2 — Afsluitingseigenschap

Bewijs het onderstaande lemma in vijf zinnen.

Lemma 1. *Stel dat $\mathcal{L}_1$ en $\mathcal{L}_2$ reguliere talen zijn. Nu is $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2$ ook regulier.*



Figuur 1: Gelijkzijdige driehoek

Opgave 3 — Is het Regulier?

In deze opgaven presenteren we een drietal talen, aan jou de taak om te bewijzen of de taal regulier is, of juist niet. Hint: gebruik het pomplemma of de Myhill–Nerode stelling.

Opgave 3.a — Voorkomen

We nemen het alfabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ en definiëren de volgende taal. Is deze taal regulier?

$$\mathcal{L} = \{w \in \Sigma^* \mid a \text{ komt twee keer zo vaak voor in } w \text{ als } b\}$$

Opgave 3.b — Rekenen

We nemen het alfabet $\Sigma = \{1, 2\}$ en definiëren de volgende taal. Is deze taal regulier?

$$\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid 1 \text{ komt minstens } 3^{2012} \text{ keer voor in } w\}$$

Opgave 3.c — Appels

We bekijken nu het alfabet $\Sigma = \{a, e, f, l, p, s\}$ en definiëren de volgende taal. Is deze taal regulier?

$$\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid \text{appel flap komt even vaak voor in } w \text{ als appelsap}\}$$

Opgave 4 — Draaien

BONUS

Bekijk een gelijkzijdige driehoek als in [Figuur 1](#). Je kan de driehoek verplaatsen op zo'n manier dat hoekpunten terecht komen op hoekpunten. Zo kun je bijvoorbeeld de driehoek draaien om haar middelpunt, tegen de klok in onder een hoek van 120 graden. Probeer je dit vooral in te beelden! Als je dat doet, dan zie je dat hoekpunt A op hoekpunt B valt, B op C en C op A . Laten we deze operatie r noemen.

Je kan r één keer uitvoeren, maar natuurlijk ook nóg een keer, en nog eens. Maar als je r drie keer uitvoert, dan gebeurt er eigenlijk niks; alle hoekpunten staan weer op hun beginplek. Dit niks doen noemen we e . Je kan ook de driehoek optillen, en omkantelen om de as tussen B en het middelpunt van AC . Zodoende verwisselen A en C van plek, maar B blijft op dezelfde plaats. Deze operatie noemen we s .

Als we eerst s uitvoeren, en daarna r , dan schrijven we dat op als sr . Ga na dat door het herhaaldelijk uitvoeren van deze operaties e, r en s je alleen de operaties e, r, rr, s, sr en srr krijgt. Met andere woorden, door het herhaaldelijk uitvoeren van deze zes operaties krijg je steeds een van deze zes transformaties van de driehoek. Neem nu de verzameling $G = \{e, r, rr, s, sr, srr\}$ van al deze operaties. Dit geeft een monoïde, waar eenheid e is en $\oplus$ is het na elkaar uitvoeren van de operaties. Deze monoïde wordt ook wel de “dihedrale groep van de regelmatige driehoek” genoemd. Als voorbeeld, zie dat de volgende gelijkheden gelden:

$$e \oplus r = r, \quad r \oplus r = rr, \quad r \oplus r \oplus r = e, \quad r \oplus sr = s$$

Bekijk nu het alfabet $\Sigma = \{e, r, s\}$. Ga nu na dat er een homomorfisme $f : \Sigma^* \rightarrow G$ is. Bewijs nu dat de volgende taal regulier is.

$$\mathcal{L} = \{w \in \Sigma^* \mid \text{de operaties in } w \text{ uitvoeren is hetzelfde als niks doen}\}$$