Tussentoets Inleiding Logica voor CKI, 2013–2014

Educatorium Gamma

Maandag 7 oktober, 13:30–16:30

Deze toets is gesloten boek. De toets bestaat uit 5 opgaven. Alle onderdelen tellen even zwaar. (Ook de bonusopgave, maar die hoeft niet gemaakt te worden om een 10 te behalen.) Lees de vragen steeds goed, en formuleer uw antwoord helder (lever geen kladbladen in). Beargumenteer steeds uw antwoord (een simpel 'ja' of 'nee' levert slechts een klein gedeelte van de punten op). Succes!

1. **Deze opgave betreft problemen modelleren en oplossen met behulp van propositielogica;**

   (a) **Vertaal de volgende zinnen geschikt naar propositielogische formules, door eerst geschikte atomaire proposities te geven (de vertaalsleutel).**

      i. **Ten minste één van Frodo, Gollum, Bilbo en Sméagol heeft de ring.**
      ii. **Hoogstens één van Frodo, Gollum en Bilbo heeft de ring.**
      iii. **Als Sméagol de ring niet heeft, dan hebben Frodo en Bilbo de ring ook niet.**
      iv. **Sméagol heeft de ring dan en slechts dan als Gollum de ring heeft.**

      - **geen vertaalsleutel; vertaalsleutel: f is frodo ipv f is frodo heeft de ring;**
      - **verschillende vertaalsleutels voor de verschillende zinnen (dit leidde tot fouten in het volgende onderdeel);**
      - **bij de tweede zin de optie $\neg f \vee \neg g \vee \neg b$ vergeten; of andersom ook nog eisen dat $f \vee g \vee b$;**
      - **bij de derde zin $\neg s \to \neg(f \wedge b))$ in plaats van $\neg s \to (\neg f \wedge \neg b)$ o.i.d..**

(b) Bepaal de mogelijke combinaties van waarheidswaarden van de atomaire proposities in het bovenstaande, d.w.z. die combinaties die alle zinnen waar maken, op een wijze (uit de propositielogica) naar keuze, en beantwoord de vraag wie de ring heeft.

- **fouten in de waarheidstafel;**
- **losse waarheidstafels (om het overzichtelijk/klein te houden) maar dan fout gecombineerd;**
- **oplossing informeel beredeneren (zonder gebruik te maken van de formules/semantische regels);**
- **gebruikmaken van info uit het boek, of de werkelijkheid (twee personen kunnen niet allebei de ring hebben);**

(c) Leg uit wat het betekent dat een voegteken waarheidsdefiniet is, en geef zowel een voorbeeld van een Nederlandse zin met een voegteken dat waarheidsdefiniet is, als van zo'n zin waar het voegteken dat niet is.

- **waarheidsdefiniet verkeerd gedefinieerd (meerderheid; vaak iets als: het voegteken zelf heeft geen waarheidswaarde?? of: dan zijn de proposities onafhankelijk van elkaar??);**
- **vergeten aan te geven wat het (al dan niet waarheidsdefiniete) voegwoord in een voorbeeldzin is.**

2. Deze opgave betreft de syntax van propositielogica;

(a) Geef van ieder van de drie volgende expressies aan of het een formule van de propositielogica (volgens de inductieve definitie van de verzameling FOR) betreft of niet.

$$\neg\neg\neg(\bot \leftrightarrow p_2)$$

$$:-)$$

$$(p_1 \vee ((p_2 \vee p_3) \wedge p_0))$$

Zo ja, geef de ontleedboom van de formule, en geef de formule met weglating van zoveel mogelijk haakjes (volgens de voorrangregels). Zo nee, beargumenteer waarom het geen formule betreft.

- **vergeten de vraag helemaal te lezen (geen ontleedboom; geen weglaten van de haakjes);**
- **bij de eerste expresssie: negaties als splitsende connectieven zien (met links de negatie);**
- **bij de tweede expressie: zeggen dat : en $-$ geen elementen van FOR zijn (dat is niet voldoende: $\vee$ is ook geen element van FOR, maar kan wel in een formule voorkomen); zeggen: deze formule is geen formule??**
- **bij de derde expressie: haakjes weglaten met als argument dat $\vee$ en $\wedge$ dezelfde prioriteit hebben ($A \vee B \wedge C$??)**

(b) Bepaal een disjunctieve normaalvorm van de formule

$$\neg((p_0 \wedge p_1) \vee (p_2 \wedge p_3))$$

op een wijze naar keuze.

- **fouten in de waarheidstafel (met equivalenties werken was veel sneller, en leverde een kleinere dnv op);**
- **bij het werken met equivalenties vergeten om $\vee$ naar $\wedge$ om te zetten en vice versa bij De Morgan;**
- **stoppen in de conjunctieve normaalvorm.**

(c) **Geef een recursieve definitie van de functie f van de verzameling formules FOR van de propositielogica naar de verzameling rijtjes van x'en, die ieder symbool (ook de haakjes) in een formule vervangt door een x;**
In het bijzonder

$$\begin{array}{rcl} f(p_2) & = & \mathtt{x} \\ f(\bot) & = & \mathtt{x} \\ f(\neg\neg\neg p_1) & = & \mathtt{xxxx} \\ f((\bot \vee p_0)) & = & \mathtt{xxxxx} \end{array}$$

Laat m.b.v. stapsgewijze berekeningen zien dat uw functie inderdaad deze uitkomsten heeft op bovenstaande voorbeelden.

- **recursieve aanroep vergeten, b.v.** $f(\neg A) = \mathtt{x}A$ **en dan iets als** $f(\neg\neg\neg p_1) = \mathtt{x}\neg\neg p_1 = \mathtt{xx}\neg p_1 = \mathtt{xxx}p_1 = \mathtt{xxxx}$ **bij de berekening??;**
- **vergeten** f **op de voorbeelden toe te passen.**

3. Deze opgave betreft semantisch redeneren;

Beschouw het volgende redeneerschema dat we R zullen noemen:

$$p \wedge (q \vee r), (q \wedge p) \to \bot \;/\; r \to q$$

(a) geef de definitie van wat het betekent dat een redeneerschema geldig is, en bepaal of R geldig is met behulp van een waarheidstafel;

- **verkeerde definitie van geldigheid (maar bijna altijd gevolgd door een goede definitie van ongeldigheid): valuaties V maken zowel Γ als A waar voor een schema $\Gamma \;/\; A$ ($\bot \;/\; \bot$ is geldig!); V vergeten te kwantificeren, of existentieel gekwantificeerd (geldig als er een wereld V is zodanig dat . . .);**
- **waarheidstafel verkeerd (als, dan vaak door non-standaard manier van enumereren v.d. mogelijke combinaties).**

(b) bepaal of R geldig is met behulp van semantisch redeneren (op een van de twee manieren naar keuze);

- **semantische regels wel correct toepassen om (on)waarheid van een formule in een wereld af te breken tot (on)waarheden van atomen in die wereld, maar niet aangeven hoe die vervolgens combineren tot de gewenste conclusie;**
- **verkeerd afbreken in het geval van 'maakt niet waar'; (een $\wedge$ breekt dan af tot 'en/of' van de delen);**
- **andere uitkomst (nu is het schema b.v. geldig i.p.v. ongeldig) of andere definitie van geldigheid.**

(c) laat zien dat de vraag of R geldig is, geherformuleerd kan worden als een vraag of een bepaalde formule A vervulbaar is, d.w.z. geef een formule A zodanig dat R is geldig dan en slechts als A is *on*vervulbaar. (Het gaat hier slechts om het herformuleren; U mag hier geen gebruikmaken van of R al dan niet geldig is).

- **opgave bevatte een fout (zie schuingedrukt 'on');**
- **niet meegeteld voor 10, wel als bonus;**
- **$\neg R$?? (R is geen formule);**

4. Deze opgave betreft natuurlijke deductie;
(vergeet niet te vermelden hoe uw afleidingsboom antwoord geeft op de vraag)

(a) Laat zien met natuurlijke deductie dat

$$p_0 \wedge p_1, p_2 \wedge \neg p_0 \vdash p_3$$

- **vergeten te vermelden hoe afleidingsboom antwoord geeft op de vraag.**

(b) Laat zien met natuurlijke deductie dat

$$\neg(p_0 \vee p_1) \vdash (\neg p_1 \wedge \neg p_0)$$

- **$\vee$-eliminatie op $\neg(p_0 \vee p_1)$ (kan niet want hoofdconnectief is $\neg$), en ook $\vee$-eliminatie van $p_0 \vee p_1$ naar, zeg, p_0;**
- **$\neg$-introductie van, zeg, $\neg p_1$, die p_1 (i.p.v. $\bot$) probeert af te leiden;**
- **$\neg$-eliminatie van $\neg A$ naar A.**

(c) Geef twee natuurlijkedeductiebewijzen die aantonen dat

$$\vdash (p_0 \to (\neg p_1 \to (p_1 \to p_0)))$$

- **ingetrokken hypothesen midden in de ontleedboom (i.p.v. alleen als blad);**
- **$\to$-introductie die ook de ingetrokken hypothese als argument heeft;**
- **nummero 2 (i.p.v. número 2).**

5. Deze opgave betreft van alles wat;

(a) Geef van beide van de volgende formules aan of het een tautologie, een contradictie, dan wel een contingente formule betreft.

i. $((p_0 \to p_0) \to \bot)$;

ii. $(p_0 \to (p_0 \to \bot))$.

- **tweede formule is ook een contradictie??**

(b) Bepaal of de verzameling

$$\{\boldsymbol{p}, \neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}, \neg \boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{p}\}$$

strijdig is of niet.

- **semantische regels toepassen tot (on)waarheid van atomen overblijft en dan zonder verdere redenering zeggen 'dus . . . ';**
- **niet alle formules checken;**

(c) Laat zien dat $\nvdash p \wedge \neg p$;

- **laten zien dat $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$ en dan direct concluderen dat *dus* $\nvdash p \wedge \neg p$ (terwijl het laatste slechts zegt dat $p \wedge \neg p$ *niet* afleidbaar is met ND; het verband tussen beide loopt altijd via correctheid en volledigheid; overigens zijn er tal van formules A waarvoor noch $\vdash A$ noch $\vdash \neg A$, n.l. alle contingente formules, b.v. noch $\vdash p$ noch $\vdash \neg p$);**
- **dit kan alleen afgeleid worden met conjunctie introductie en 'dan loopt ND vast'.**
- **$p \wedge \neg p$ is een contradictie, dus $\nvdash p \wedge \neg p$ (maar $\nvdash$ betreft niet-afleidbaarheid (syntax), terwijl contradictie (on)waarheid betreft (semantiek); correctheid/volledigheid is hier nodig).**

(bonus) Beargumenteer dat de verzameling $\{\bot, \neg\}$ niet functioneel volledig is.

- **met deze verzameling kun je alleen maar waar en onwaar uitdrukken want geen atomen (maar dat zou dan ook gelden voor de functioneel volledige $\{\bot, \neg, \vee\}$ verzameling uit de syllabus);**
- **je kunt geen binaire connectieven uitdrukken (dat is niet precies genoeg; je kunt b.v. het binaire connectief dat als waarheidswaarde de waarde van het tweede argument geeft, prima uitdrukken).**