Inleiding Logica

Eindtoets, donderdag 11 november 2009, 13.30-16.30

Deze deeltoets is geloten boek. Hij bestaat uit 5 opgaven die ieder bestaan uit 2 gewone onderdelen. Opgave 5 heeft ook een (derde) bonusonderdeel. Met ieder onderdeel kan 1 punt behaald worden. Er zijn dus in totaal maximaal 11 punten te behalen. Het cijfer is het minimum van 10 en het aantal behaalde aantal punten. Motiveer altijd uw antwoord.

Opgave 1. Deze opgave betreft de syntax.

(a) Laat gegeven zijn dat $\varphi = (\forall x P(x) \wedge Q(s(x))) \rightarrow ((\exists y \neg Q(y)) \rightarrow (\exists z \neg P(w)))$[1] een formule in de predikatenlogische taal met functiesymbolen L is. Geef aan welke constanten, variabelen, en predikaatsymbolen de taal L dan in ieder geval moet bevatten (als er meerdere mogelijkheden zijn, geef die dan alle aan). Geef tevens de voorkomens van connectieven in de formule φ aan.

(b) Geef een ontledingsboom van de bovenstaande formule φ en geef daarin aan welke variabelen door kwantoren (en dan ook welke) gebonden worden. Kan de formule $\varphi' = (\forall y P(y) \wedge Q(s(y))) \rightarrow ((\exists w \neg Q(w)) \rightarrow (\exists x \neg P(z)))$ uit de formule φ verkregen door het herbenoemen van variabelen? Zo ja, geef de herbenoeming, zo nee, waarom niet.

Opgave 2. Deze opgave betreft semantiek.

Beschouw een predikaatlogische vocabulaire $L = \langle C, V, P \rangle$ zonder constanten, d.w.z. $C = \emptyset$, met variabelen $V = \{x, y, z\}$, en predikaatsymbolen $P = \{E, A\}$ met E éénplaatsig en A drieplaatsig. En beschouw de volgende drie zinnen (gesloten formules):

- $\forall x(Ex \leftrightarrow (\exists y Ayyx))$
- $\forall z \exists x \exists y(\neg(x = y) \wedge Axyz)$
- $\forall x \forall y \forall z((Ex \wedge Ey \wedge Axyz) \rightarrow Ez)$

(a) Beschouw het model $\mathcal{M}$ voor de vocabulaire L bestaande uit het domein $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (de natuurlijke getallen), interpretatie $E_{\mathcal{M}}$ van E als 'even', d.w.z. als $\{\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 4 \rangle, \ldots\}$, en interpretatie $A_{\mathcal{M}}$ van A als 'optellen', d.w.z. als $\{\langle 0,0,0 \rangle, \ldots \langle 0,1,1 \rangle, \ldots, \langle 3,5,8 \rangle, \ldots\}$.
Geef van ieder van de formules aan of ze waar zijn of niet op $\mathcal{M}$, beargumenteer steeds informeel uw antwoord door te omschrijven wat de formule betekent (in dit model).

(b) Geef een model $\mathcal{W}$ waarop alledrie bovenstaande zinnen waar zijn. (Dit mag d.m.v. een plaatje. Bedenk dan zelf hoe u het drieplaatsig predikaat aangeeft.)
Bepaal formeel, d.w.z. met behulp van bedelingen, de waarheid van de tweede zin in uw model $\mathcal{W}$.

Opgave 3. Deze opgave betreft de verbinding met natuurlijke taal en/of propositielogica.

(a) Vertaal de volgende zinnen in de taal van de predikatenlogica, waar nodig gebruikmakend van gelijkheid. Domein: de verzameling mensen. Vertaalsleutel: Vx: x is visser. Hxy: x heeft een hekel aan y.

[1] Nee, de w moet geen z zijn.

- Als Albert een hekel heeft aan Bertrand en Bertrand aan Cristina, en als Albert een visser is maar Cristina niet, dan is er een visser die een hekel heeft aan iemand die geen visser is.
- Een persoon die een hekel heeft aan iemand die geen hekel heeft aan hem, heeft een hekel aan iemand anders dan zichzelf.
- Als je een hekel hebt aan alle mensen die geen hekel aan zichzelf hebben, dan heb je een hekel aan jezelf.

(b) Beschouw de propositielogische formule $\varphi = p \wedge (q \vee r)$, met p,q,r propositionele variabelen. Geef een met φ corresponderende predikaatlogische formule ψ, en een correspondentie tussen valuaties V van φ en modellen $\mathcal{M}_V$ van ψ zodanig dat $\overline{V}(\varphi) = 1$ dan en slechts dan als $\mathcal{M}_V \models \psi$.

Opgave 4. Deze opgave betreft semantische tableaus.

(a) Bewijs met behulp van semantische tableaus dat $\exists x(Ax \wedge \neg Bx) \models \neg\forall x(Ax \to Bx)$ geldig is.

(b) Bewijs met behulp van semantische tableaus dat $\neg\exists x(Ax \wedge \neg Bx) \models \forall x(Ax \to Bx)$ geldig is.

Opgave 5. Deze opgave betreft natuurlijke deductie.

(a) Geef een natuurlijke deductie bewijs dat laat zien dat: $\neg\exists x(Ax \wedge \neg Bx) \vdash \forall x(Ax \to Bx)$.

(b) In de nalatenschap van de onbekende onlogicus Fraudo Frege wordt een boekje gevonden met de titel ‘Onbegripschrift’ dat vol staat met foute natuurlijke deductie bewijzen. Hij is onder andere overal vergeten subbewijzen aan te geven. Één zo’n ‘bewijs’ is hieronder gereproduceerd:

1. $Rcc \to Rcd$ (aanname)
2. $\forall x \exists y Rxy$ (aanname)
3. $\exists y Ryy$ ($\forall$E 2)
4. Rcc ($(Ryy)[c/y]$ uit 3)
5. Rcd ($\to$E 1,4)
6. $\forall y Rcy$ ($\forall$I 2–5)
7. $\forall x \forall y Rxy$ ($\forall$I 2–6)

Geef voor ieder van de regels 3–7 aan of het een correcte toepassing van de rechts in de regel genoemde natuurlijke deductieregel zou kunnen zijn (als subbewijzen netjes aangegeven zouden worden), en zo nee, wat er incorrect aan is.

(c) Bonus: Stel u weet dat er een gesloten semantisch tableau bestaat met als top-sequent $\varphi \circ \psi$. Wat zegt dat over het al dan niet afleidbaar zijn in natuurlijke deductie van $\varphi \vdash \psi$? Geef precies aan van welke resultaten u in uw antwoord gebruik maakt.