Inleiding Logica voor CKI

Albert Visser

Philosophy, Faculty Humanities, Utrecht University

31 oktober, 2013

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

ND

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

ND

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

ND

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

ND

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

ND

Overview

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

ND

Interpretatie van Predikaatsymbolen 1

Een model van Signatuur Σ is een paar $\langle D, I \rangle$, waar D een *niet-leeg* domain is en I de interpretatiefunctie.

I kent aan de constanten van de signatuur objecten uit het domein toe.

Interpretatie van Predikaatsymbolen 2

Stel $\mathrm{ar}(P) = n$, dan is $I(P)$ een deelverzameling van D^n. Hier is D^n de verzameling van rijtjes van elementen van D ter lengte n (n-tuples). M.a.w. $I(P) \subseteq D^n$.

Voor unaire P beschouwen we $I(P)$ vaak als een deelverzameling van P. Voor 0-aire P is $I(P)$ een waarheidswaarde net als in de propositielogica.

Overview

Interpretatie van de Variabele

We voeren een tweede orakel in naast I: de bedeling f. De bedeling is een functie van variabelen naar de objecten uit het domein. Terwijl we het domein vasthouden laten we de bedeling variëren en daarmee de waarde van de variabele.

- $[\![t]\!]_{\mathcal{M},f} = I(t)$, als t een constante is.
- $[\![t]\!]_{\mathcal{M},f} = f(t)$, als t een variabele is.

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

ND

Interpretatie van Atomaire Formules

- $\mathcal{M}, f \models Pt_1 \ldots t_n$ dan en slechts dan
$$\langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},f}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},f} \rangle \in I(P).$$

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

ND

De reset

$f[x := d]$ is het resultaat van het veranderen van de waarde van f op x naar d. Met andere woorden $f[x : d]$ is een bedeling g zodat $g(y) = f(y)$ voor alle variabelen y syntactisch ongelijk aan x en $g(x) = d$.

Interpretatie van Complexe Formules 1

sem0	$\mathcal{M}, f \models Pt_1 \ldots t_n$	$\Leftrightarrow$	$\langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},f}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},f} \rangle \in I(P)$
sem$\bot$	$\mathcal{M}, f \models \bot$	$\Leftrightarrow$	0=1
sem$\neg$	$\mathcal{M}, f \models \neg B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \not\models B$
sem$\wedge$	$\mathcal{M}, f \models A \wedge B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A$ en $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\vee$	$\mathcal{M}, f \models A \vee B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A$ of $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\rightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A \rightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \not\models A$ of $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A \leftrightarrow B$	$\Leftrightarrow$	[$\mathcal{M}, f \models A$ en $\mathcal{M}, f \models B$] of [$\mathcal{M}, f \not\models A$ en $\mathcal{M}, f \not\models B$]
sem$\forall$	$\mathcal{M}, f \models \forall x\, A$	$\Leftrightarrow$	voor alle $d \in D$, $\mathcal{M}, f[x : d] \models A$
sem$\exists$	$\mathcal{M}, f \models \exists x\, A$	$\Leftrightarrow$	er is een $d \in D$, zodat $\mathcal{M}, f[x : d] \models A$

Interpretatie van Complexe Formules 2

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{M}, f \not\models Pt_1 \dots t_n & \Leftrightarrow & \langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},f}, \dots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},f} \rangle \notin I(P) \\
\mathcal{M}, f \not\models \bot & \Leftrightarrow & 0{=}0 \\
\mathcal{M}, f \not\models \neg B & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, f \models B \\
\mathcal{M}, f \not\models A \wedge B & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, f \not\models A \text{ of } \mathcal{M}, f \not\models B \\
\mathcal{M}, f \not\models A \vee B & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, f \not\models A \text{ en } \mathcal{M}, f \not\models B \\
\mathcal{M}, f \not\models A \rightarrow B & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, f \models A \text{ en } \mathcal{M}, f \not\models B \\
\mathcal{M}, f \not\models A \leftrightarrow B & \Leftrightarrow & [\mathcal{M}, f \models A \text{ en } \mathcal{M}, f \not\models B] \text{ of} \\
 & & \qquad [\mathcal{M}, f \not\models A \text{ en } \mathcal{M}, f \models B] \\
\mathcal{M}, f \not\models \forall x\, A & \Leftrightarrow & \text{er is een } d \in D\text{, zodat } \mathcal{M}, f[x:d] \not\models A \\
\mathcal{M}, f \not\models \exists x\, A & \Leftrightarrow & \text{voor alle } d \in D\text{, } \mathcal{M}, f[x:d] \not\models A
\end{array}
$$

Overview

Universiteit Utrecht

Definitie van Geldigheid

Zij een signatuur Σ gegeven.

(i) $\mathcal{M}, f \models \Gamma$ desda $\mathcal{M}, f \models C$ voor alle $C \in \Gamma$.

(ii) $\Gamma \models A$ desda, voor alle $\mathcal{M}$ in Mod_Σ en voor alle bedelingen f over het domein van $\mathcal{M}$, we hebben $\mathcal{M}, f \models \Gamma \Rightarrow \mathcal{M}, f \models A$.

(iii) $A_1, \ldots, A_n \models B$ desda $\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$

(iv) $\models A$ desda $\emptyset \models A$.

Strijdigheid en Vervulbaarheid

Een verzameling formules Γ is *vervulbaar* of *semantisch consistent* dan en slechts dan als er een model $\mathcal{M}$ is en een bedeling f zodat $\mathcal{M}, f \models \Gamma$.

Een verzameling formules Γ is *strijdig* of *semantisch inconsistent* dan en slechts dan als er geen model $\mathcal{M}$ is een geen bedeling f is, zodat $\mathcal{M}, f \models \Gamma$. Met andere woorden: Γ is strijdig dan en slechts dan als Γ niet vervulbaar is.

Correctheid en Volledigheid

Correctheidsstelling voor de predikatenlogica: $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \models A$.

We kunnen de correctheidsstelling ook als volgt formuleren (m.b.v. contrapositie): $\Gamma \not\models A \Rightarrow \Gamma \nvdash A$.

Dit zegt dat als we een tegenvoorbeeld tegen de redenering Γ / A vinden, we daarmee tevens hebben aangetoond dat A niet met natuurlijke deductie uit Γ af te leiden is.

Volledigheidsstelling voor de predikatenlogica: $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$. (Gödel, 1930)

We kunnen de volledigheidsstelling herformuleren tot het Model Existentie Lemma:
Als $\Gamma \nvdash A$, dan is er een model $\mathcal{M}$ en een valuatie f zodat $\mathcal{M}, f \models \Gamma$ en $\mathcal{M}, f \not\models A$.

Universiteit Utrecht

Voorbeelden

Construeer modellen om aan te tonen dat:

a. $\forall y\, \exists x\, Rxy \not\models \exists x\, \forall y\, Rxy$

b. $\exists x\, (Px \rightarrow Qx) \not\models \exists x\, Px \rightarrow \exists x\, Qx$

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

ND

Voorbeelden 1

1. $\forall x\,(Px \to Qx), \forall x\,(Qx \to Rx) \vdash \forall x\,(Px \to Rx)$
2. $\forall x\,(Px \to Qx) \vdash \forall x\, Px \to \forall x\, Qx$
3. $\forall x\,(Px \to Qx), \neg\forall x\, Qx \vdash \neg\forall x\, Px$
4. $\forall x\,(Px \to Qx), \exists x\, Px \vdash \exists x\, Qx$
5. $\forall x\,(Px \vee Qx) \vdash \exists x\, Px \vee \exists x\, Qx$
6. $\forall x\, Px \vee \exists x\, Qx \vdash \exists x\,(Px \vee Qx)$
7. $\forall x\,(Px \vee Qx) \vdash \exists x\, Px \vee \exists x\, Qx$
8. $\forall x\, Px \vee \exists x\, Qx \vdash \exists x\,(Px \vee Qx)$
9. $\forall x\,(Px \wedge Qx) \vdash \exists x\, Px \wedge \exists x Qx$
10. $\forall x\, \forall y\, Rxy \vdash \forall y\, \forall x\, Ryx$

Voorbeelden 2

1. $\forall x\, \forall y\, Rxy \vdash \forall y\, \forall x\, Rxy$
2. $\vdash \forall x\, Px \rightarrow \forall y\, Py$
3. $\vdash \exists x\, Px \rightarrow \exists y\, Py$
4. $\vdash \forall x\, Px \rightarrow \exists x\, Px$
5. $\vdash P \rightarrow \forall x\, P$
6. $\vdash \forall x\, (Px \rightarrow Q) \rightarrow (\exists x\, Px \rightarrow Q)$
7. $\vdash (\forall x\, Px \rightarrow Q) \rightarrow \exists x\, (Px \rightarrow Q)$
8. $\forall x\, (Px \rightarrow Qx), \neg\exists x\, (Qx \wedge Rx) \vdash \neg\exists x\, (Px \wedge Rx)$
9. $\vdash \neg\exists x\, \neg Px \leftrightarrow \forall x\, Px$
10. $\vdash \neg\forall x\, \neg Px \leftrightarrow \exists x\, Px$
11. $\forall x\, (Sx \wedge Rxa), \neg\exists x\, ((Px \wedge Rxa) \wedge Qx), \forall x\, (Sx \rightarrow Px) \vdash \exists x\, (Sx \wedge \neg Qx)$