Inleiding Logica voor CKI

Albert Visser

Philosophy, Faculty Humanities, Utrecht University

21 oktober, 2013

Universiteit Utrecht

Overview

Substitutie

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

Overview

Substitutie

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

Overview

Substitutie

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

Overview

Substitutie

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

Substitutie

$A[x := t]$ betekent: het resultaat van het vervangen van alle vrije voorkomens van x in A door t. Hier is t een constante of een variabele. Dus:

- $P(x, y)[x := c] = P(c, y)$.
- $P(x, y)[x := y] = P(y, y)$.
- $P(x, y)[x := x] = P(x, y)$.
- $(\forall x\, P(x, y) \wedge \forall y\, P(x, y))[x := c] := (\forall x\, P(x, y) \wedge \forall y\, P(c, y))$.
- $\forall x\, P(x, y)[y := x] := \forall x\, P(x, x)$.

t is *niet* vrij voor x in A als t een variabele is, zeg y, en er een vrij voorkomen is van x in A dat binnen het bereik ligt van een voorkomen van $\forall y$ of $\exists y$.

- y is niet vrij voor x in $\forall z\, R(x, y, z) \wedge \exists y\, P(x, y)$.

Overview

Substitutie

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

$\forall$E

De $\forall$-eliminatie regel ziet er zo uit.

$$\frac{\forall x\, A}{(A)[x := t]}\ \forall\text{E}$$

We eisen dat t vrij is voor x in A.

Wat er mis gaat als we dit niet eisen, wordt onmiddellijk duidelijk uit het volgende voorbeeld:

Goed:
$$\frac{\forall x\, \exists y\, x < y}{\exists y\, z < y}\ \forall\text{E}$$

Fout:
$$\frac{\forall x\, \exists y\, x < y}{\exists y\, y < y}\ \forall\text{E}$$

$\forall$I

De $\forall$-introductieregel regel ziet er zo uit.

$$\frac{A[x := y]}{\forall x\, A}\ \forall\mathrm{I}$$

We eisen:

1. y is vrij is voor x in A,
2. y komt niet vrij voor in een nog openstaande aanname waar de deelconclusie $A[x := y]$ op gebaseerd is,
3. hetzij y is identiek aan x of $y \notin \mathrm{FV}(A)$.

Voorwaarde 1+ 2

y is vrij is voor x in A. We kiezen $A := \exists y\, Dxy$.
$A[x := y] = \exists y\, Dyy$.

Fout:
$$\frac{\exists y\, Dyy}{\forall x\, \exists y\, Dxy}\ \forall E$$

y komt niet vrij in een nog openstaande aanname waar de deelconclusie $A[x := y]$ op gebaseerd is. We kiezen $A := Qx$.

Fout:
$$\dfrac{\dfrac{Py \qquad \dfrac{\forall x\,(Px \to Qx)}{Py \to Qy}\ \forall E}{Qy}\ \to E}{\forall x\, Qx}\ \forall I$$

Voorwaarde 3

Hetzij y is identiek aan x of $y \notin \mathrm{FV}(A)$. We kiezen $A = Rxy$. $A[x := y] = Ryy$.

Fout:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\, Rxx}{Ryy}\ \forall E}{\forall x\, Rxy}\ \forall I}{\forall y\, \forall x\, Rxy}\ \forall I$$

Universiteit Utrecht

∃I

$$\frac{A[x := t]}{\exists x\, A}\ \exists\mathrm{I}$$

We eisen dat t substitueerbaar is voor x in A.

Fout: $$\frac{\forall y\, Ryy}{\exists x\, \forall y\, Rxy}\ \exists\mathrm{I}$$

$A = \forall y\, Rxy$, $A[x := y] = \forall y\, Ryy$.

∃E

$$\dfrac{\exists x\, A \qquad \begin{array}{c}[A[x := y]] \\ \nabla \\ C\end{array}}{C}\ \exists\mathrm{E}$$

1. y is substitueerbaar voor x in A.
2. In het rechter bewijsgedeelte ($A[x := y]/C$) geldt: y mag niet vrij voorkomen in een hypothese, anders dan in $A[x := y]$, die op het moment dat de regel wordt toegepast nog niet is ingetrokken.
3. y is identiek aan x, of y komt niet vrij voor in A.
4. y mag niet vrij voorkomen in C.

Conditie 1

y is vrij voor x in A.

Fout:

$$\frac{\exists x\, \forall y\, Px \qquad [\forall y\, Py]^1}{\forall y\, Py}\ \exists E, 1$$

$A := \forall y\, Px$, $A[x := y] = \forall y\, Py$.

Conditie 2

In het rechter bewijsgedeelte ($A[x := y]/C$) geldt: y mag niet vrij voorkomen in een hypothese, anders dan in $A[x := y]$, die op het moment dat de regel wordt toegepast nog niet is ingetrokken.

Fout:

$$\dfrac{\exists x\, Px \qquad \dfrac{\exists x\, Qx \qquad \dfrac{\dfrac{[Py]^2 \quad [Qy]^1}{Py \wedge Qy}\,\wedge\mathrm{I}}{\exists x\,(Px \wedge Qx)}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x\,(Px \wedge Qx)}\,\exists\mathrm{E}, 1}{\exists x\,(Px \wedge Qx)}\,\exists\mathrm{E}, 2$$

Conditie 3

y is identiek aan x, of y komt niet vrij voor in A.

Fout:

$$\dfrac{\exists x\, x \neq y \qquad \dfrac{[y \neq y]^1}{\exists x\, x \neq x}\,\exists I}{\exists x\, x \neq x}\,\exists E, 1$$

Conditie 4

y mag niet vrij voorkomen in C.

Fout:

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\, Px \quad [Px]^1}{Px}\ \exists E, 1}{\forall x\, Px}\ \forall I$$

Overview

Substitutie

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

Voorbeelden 1

1. $\forall x\,(Px \rightarrow Qx), \forall x\,(Qx \rightarrow Rx) \vdash \forall x\,(Px \rightarrow Rx)$
2. $\forall x\,(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x\, Px \rightarrow \forall x\, Qx$
3. $\forall x\,(Px \rightarrow Qx), \neg\forall x\, Qx \vdash \neg\forall x\, Px$
4. $\forall x\,(Px \rightarrow Qx), \exists x\, Px \vdash \exists x\, Qx$
5. $\forall x\,(Px \vee Qx) \vdash \exists x\, Px \vee \exists x\, Qx$
6. $\forall x\, Px \vee \exists x\, Qx \vdash \exists x\,(Px \vee Qx)$
7. $\forall x\,(Px \vee Qx) \vdash \exists x\, Px \vee \exists x\, Qx$
8. $\forall x\, Px \vee \exists x\, Qx \vdash \exists x\,(Px \vee Qx)$
9. $\forall x\,(Px \wedge Qx) \vdash \exists x\, Px \wedge \exists x Qx$
10. $\forall x\, \forall y\, Rxy \vdash \forall y\, \forall x\, Ryx$

Voorbeelden 2

1. $\forall x \forall y\, Rxy \vdash \forall y \forall x\, Rxy$
2. $\vdash \forall x\, Px \to \forall y\, Py$
3. $\vdash \exists x\, Px \to \exists y\, Py$
4. $\vdash \forall x\, Px \to \exists x\, Px$
5. $\vdash P \to \forall x\, P$
6. $\vdash \forall x\, (Px \to Q) \to (\exists x\, Px \to Q)$
7. $\vdash (\forall x\, Px \to Q) \to \exists x\, (Px \to Q)$
8. $\forall x\, (Px \to Qx), \neg\exists x\, (Qx \wedge Rx) \vdash \neg\exists x\, (Px \wedge Rx)$
9. $\vdash \neg\exists x\, \neg Px \leftrightarrow \forall x\, Px$
10. $\vdash \neg\forall x\, \neg Px \leftrightarrow \exists x\, Px$
11. $\forall x\, (Sx \wedge Rxa), \neg\exists x\, ((Px \wedge Rxa) \wedge Qx), \forall x\, (Sx \to Px) \vdash \exists x\, (Sx \wedge \neg Qx)$