Overzicht

- geldige redeneerschema's
- natuurlijke deductie (RAA)
- correctheid en volledigheid van natuurlijke deductie voor propositielogica
- equivalentie

Geldigheid

Een redenering

$$\frac{A_1 \ldots A_n}{C}$$

is **geldig** als in alle *situaties* waarin de aannames *(A_1 ...A_n) vervuld* zijn de conclusie *(C)* ook *waar* is.

Geldigheid

voor alle valuaties V

$$\frac{\text{als } V(A_1)=1 \text{ en } \ldots \text{ en } V(A_n)=1}{\text{dan } V(C)=1}$$

Geldigheid

voor alle werelden V

$$\frac{\text{als } V \vDash A_1 \text{ en } \ldots \text{ en } V \vDash A_n}{\text{dan } V \vDash C}$$

notatie: A_1 ,..., $A_n \vDash C$

Natuurlijke deductie

- syntax voor bewijzen in propositielogica
- syntax = afleidingsbomen
- boom modelleert hypothetische redenering
- bladeren = aannames (0,1 of meer)
- vertakking = redeneerstap
- wortel = conclusie (precies 1)

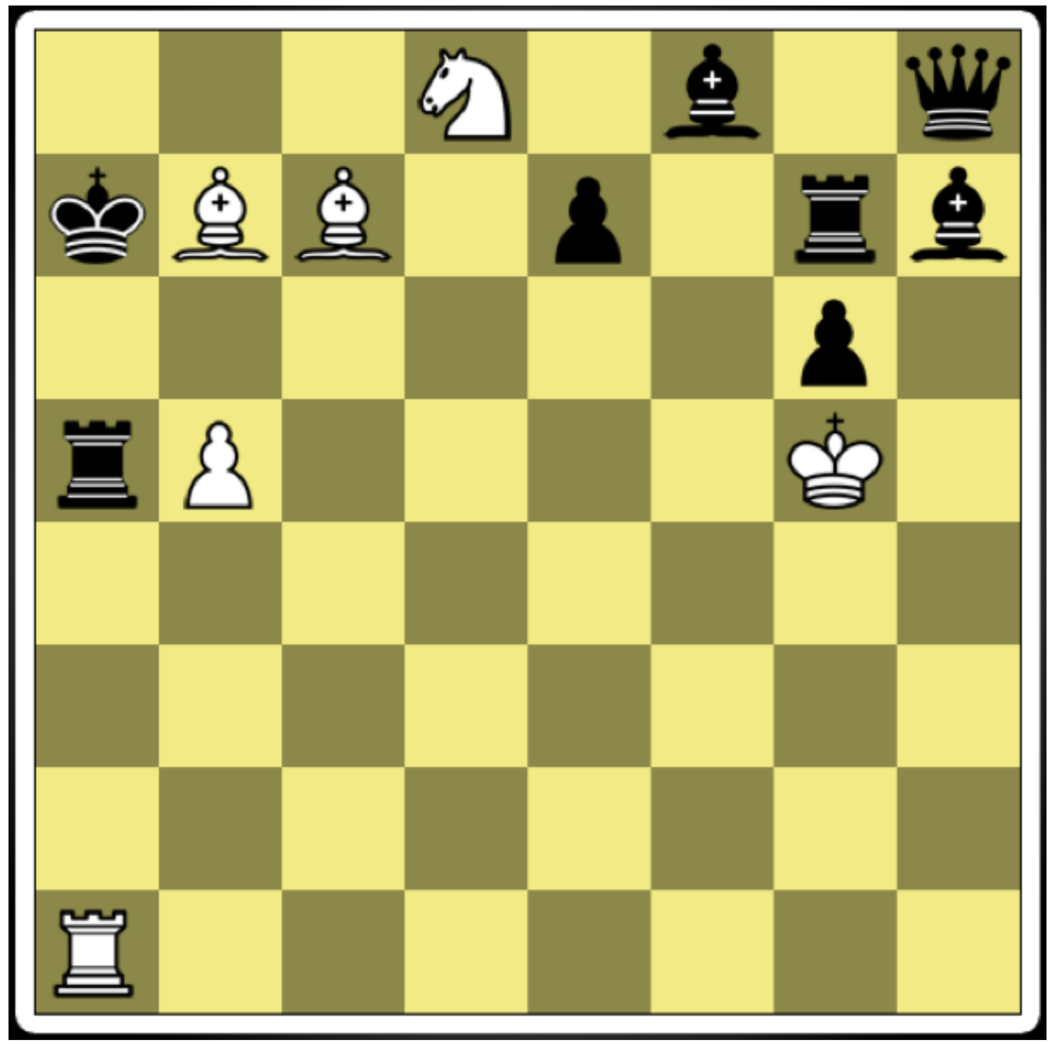
ND: syntax vs. semantiek

- $A_1,...,A_n \vdash B$
- er is een afleidingsboom met (niet ingetrokken) aannames (dwz bladeren) $A_1,...,A_n$ \`en conclusie (dwz wortel) B
- afleidingsregels \`voeren waarheden in een nieuwe waarheid' over
- $A_1,...,A_n \models B$ (correctheid (na te streven))

Redeneerstap

- redeneerstap instantie van redeneerschema
- per connectief introductie en eliminatieschema
- introductieschema = introduceer dat connectief als hoofdconnectief in formule
- eliminatieschema = verwijder/elimineer dat hoofdconnectief uit formule

Disjunctie



wat zwart zet → wit kan mat geven?

ND:disjunctie

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}$$

Eliminatie (intrekken hypothesen (0,1 of meer))

$$\dfrac{A}{A \vee B} \qquad\qquad \dfrac{B}{A \vee B}$$

Introductie (links) Introductie (rechts)

Alles te bewijzen?

- nee, b.v. Pierce’s Law niet: $((p \to q) \to p) \to p$

reductio ad absurdum

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg A]\\[4em] \bot\end{array}}{A}$$

Maakt waar

- $V \models p$ als $V(p) = 1$
- niet $V \models \bot$ (afkorting $V \not\models \bot$)
- $V \models \neg A$ als $V \not\models A$
- $V \models (A \wedge B)$ als $V \models A$ en $V \models B$
- $V \models (A \vee B)$ als $V \models A$ of $V \models B$
- $V \models (A \rightarrow B)$ als $V \not\models A$ of $V \models B$
- $V \models (A \leftrightarrow B)$ als $(V \models A)$ desda $(V \models B)$

Semantisch gevolg

- definitie: $V \models \Gamma$ als $V \models A$ voor alle $A \in \Gamma$ (een valuatie V maakt een verzameling Γ van formules waar, als V iedere formule A in die verzameling waar maakt)
- definitie: $\Gamma \models A$ als voor alle V zodanig dat $V \models \Gamma$ geldt $V \models A$ (A is een semantisch gevolg van Γ als iedere valuatie V die Γ waar maakt ook A waar maakt

Semantisch vervolg

- $\{ (p_0 \wedge p_1) \} \vDash p_0$ (want als $V \vDash (p_0 \wedge p_1)$ dan per definitie van wanneer V een conjunctie waar maakt, $V \vDash p_0$ en $V \vDash p_1$, waarvan we de eerste gebruiken om te concluderen
- $\{ p_0, \neg p_0\} \vDash \bot$ (want iedere valuatie V waarvoor zowel $V \vDash p_0$ als $V \vDash \neg p_0$ geldt, dat wil zeggen voor geen enkele V, geldt ook $V \vDash \bot$; de verzameling $\{ p_0, \neg p_0\}$ is strijdig)

Volledigheidsstelling

- (B is een semantisch gevolg van $A_1,...,A_n$) dan en slechts dan als (B afleidbaar uit $A_1,...,A_n$)
- $A_1,...,A_n \models B$ dan en slechts dan als $A_1,...,A_n \vdash B$
- $\models$ = $\vdash$ (semantiek vs. syntax)
- $\models$ als $\vdash$ (correctheid, soundness)
- $\models$ dan $\vdash$ (volledigheid, completeness)

Bewijs van volledigheid?

- $A \models B$ dan en slechts dan als $\{A, \neg B\} \models \bot$
- $A \models B$ dan en slechts dan als $\models A \rightarrow B$ (Hfdstk 6, Stelling 3.9)
- $A1, \ldots, An \models B$ dan en slechts dan als $\models A1 \rightarrow \ldots \rightarrow An \rightarrow B$

Stellingen over $\models$

- $A \models B$ dan en slechts dan als $\{A, \neg B\} \models \bot$
- $A \models B$ dan en slechts dan als $\models A \rightarrow B$ (Hfdstk 6, Stelling 3.9)

Equivalentie

- def: A en B zijn equivalent als B een semantisch gevolg is van A en andersom
- def: A Eq B als $A \models B$ en $B \models A$
- stelling: A Eq B als $V(A) = V(B)$ voor alle V
- stelling: A Eq B als A,B zelfde waarheidstafel

Vervangen door Equivalenten(Herschrijven)

Stelling 3.14: Het vervangen van een formule door een equivalente verandert de valuatie/waarheidstafel niet.

DNV equivalenties

- $(A \leftrightarrow B)$ Eq $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow B)$ Eq $(\neg A \vee B)$
- $\neg\neg A$ Eq A
- $\neg(A \wedge B)$ Eq $(\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B)$ Eq $(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge (B \vee C)$ Eq $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \wedge A$ Eq A
- $A \vee A$ Eq A

DNV herschrijven $\rightsquigarrow$

- $(A \leftrightarrow B) \rightsquigarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow B) \rightsquigarrow (\neg A \vee B)$
- $\neg\neg A \rightsquigarrow A$
- $\neg(A \wedge B) \rightsquigarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B) \rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge (B \vee C) \rightsquigarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $(B \vee C) \wedge A \rightsquigarrow (B \wedge A) \vee (C \wedge A)$
- $A \wedge A \rightsquigarrow A$ (niet nodig voor DNV)
- $A \vee A \rightsquigarrow A$ (niet nodig voor DNV)

DNV herschrijven vb

$$(\neg p \leftrightarrow q) \rightsquigarrow$$

$$((\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$$

$$((\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \rightsquigarrow$$

$$((p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$$

$$(((p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((p \vee q) \wedge \neg p)) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$$

$$(((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q)) \vee ((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)))$$

Disjunctieve normaalvorm

Definitie: Formule is in/een disjunctieve normaalvorm (DNV) als hij niet verder herschreven kan worden

Stelling: de formule A is in DNV dan en slechts dan als in de afleidingsboom disjuncties alleen boven conjuncties, en conjuncties alleen boven negaties voorkomen

Stelling: voor iedere A is er een A' in DNV zdd A Eq A'

Herbrand equivalenties

- $(A \leftrightarrow B)$ Eq $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow B)$ Eq $(A \wedge B) + A + \top$
- $(A \vee B)$ Eq $(A \wedge B) + A + B$
- $A \wedge (B + C)$ Eq $(A \wedge B) + (A \wedge C)$
- $\neg A$ Eq $A + \top$
- $A + \bot$ Eq A
- $A + A$ Eq A
- $A \wedge \bot$ Eq $\bot$
- $A \wedge \top$ Eq A
- $A \wedge A$ Eq A

Herbrand herschrijven $\rightsquigarrow$

- $(A \leftrightarrow B) \rightsquigarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow B) \rightsquigarrow (A \wedge B) + A + \top$
- $(A \vee B) \rightsquigarrow (A \wedge B) + A + B$
- $A \wedge (B + C) \rightsquigarrow (A \wedge B) + (A \wedge C)$
- $\neg A \rightsquigarrow A + \top$
- $A + \bot \rightsquigarrow A$
- $A + A \rightsquigarrow \bot$
- $A \wedge \bot \rightsquigarrow \bot$
- $A \wedge \top \rightsquigarrow A$
- $A \wedge A \rightsquigarrow A$
- modulo associativiteit en commutativiteit van $+, \wedge$

HNV herschrijven vb

$\neg p \leftrightarrow q \rightsquigarrow (\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$

$((\neg p \wedge q) + \neg p + \top) \wedge ((\neg q \wedge p) + \neg q + \top) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow$

$(((p + \top) \wedge q) + p + \top + \top) \wedge (((q + \top) \wedge p) + q + \top + \top) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$

$(((p + \top) \wedge q) + p + \bot) \wedge (((q + \top) \wedge p) + q + \bot) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$

$(((p + \top) \wedge q) + p) \wedge (((q + \top) \wedge p) + q) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$

$((p \wedge q) + (\top \wedge q) + p) \wedge ((q \wedge p) + (\top \wedge p) + q) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$

$((p \wedge q) + q + p) \wedge ((q \wedge p) + p + q) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow$

$(p \wedge q \wedge q \wedge p) + (p \wedge q \wedge p) + (p \wedge q \wedge q) + (q \wedge q \wedge p) +$

$(q \wedge p) + (q \wedge q) + (p \wedge q \wedge p) + (p \wedge p) + (p \wedge q) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow$

$(p \wedge q) + (p \wedge q) + (p \wedge q) + (q \wedge p) +$

$(q \wedge p) + q + (q \wedge p) + p + (p \wedge q) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow q + p$

HNV

- Stelling: voor alle A er is een A' in HNV met A Eq A'
- Stelling: als A in HNV en tautologie dan A = $\top$
- Stelling: als A in HNV en contradictie dan A= $\perp$