Parvulae Logicales: Propositielogica

Hendrik Jan Veenstra

Vincent van Oostrom

Albert Visser

SAMENVATTING. Dit dictaat is bestemd voor: Inleiding Logica ck1w0010. Deze cursus wordt jullie geboden door de School voor Wijsbegeerte en Kunstmatige Intelligentie van de Faculteit Geesteswetenschappen der Universiteit Utrecht. De docenten zijn Vincent van Oostrom en Albert Visser.

Naast het dictaat kunnen bijvoorbeeld de volgende boeken (optioneel) gelezen worden. Deze zijn allen wat 'wiskundiger' dan het dictaat. (Je kunt de verwijzingen vinden in de bibliografie die achterin het dictaat staat.)

- **[Dal04]**: Het dictaat is is het meest verbonden met dit boek. Het heeft een goede balans tussen syntaxis / bewijstheorie en semantiek / model theorie.
- **[End04]**: Een introductie tot de logica van een verzamelingstheoreticus. Erg goed, maar er wordt geen bewijssysteem behandeld.
- **[BPJ02]**: Een klassiek boek. Meer aandacht voor computationele aspecten.

Op de site van het college kun je als aanvullend materiaal ook het dictaat *Parvulae Logicales Inductie* vinden.

HOOFDSTUK 1

Voorwoord

Voor velen zal deze syllabus de eerste kennismaking met de logica zijn. Daarom is geprobeerd dit manuscript zo overzichtelijk mogelijk te houden, onder andere door een zo consequent mogelijke lay-out. Bovendien wordt nagenoeg alles dat besproken wordt, begeleid door voorbeelden, die de theorie onmiddellijk in de praktijk brengen. Sleutelwoorden staan in de linker marge, zodat een bepaald begrip snel terug te vinden is. Verder is achterin een index opgenomen waar de belangrijkste passages over sleutelbegrippen terug te vinden zijn. Ieder hoofdstuk wordt afgesloten met een samenvatting, waarin alle definities en stellingen nog eens op een rijtje staan (dit voor wie geen behoefte (meer) heeft aan uitleg en andere 'interrupties').

Omdat in de logica nogal eens verzamelingstheoretische notaties gehanteerd worden, is besloten een (zeer) beknopte inleiding in de verzamelingentheorie op te nemen (Hoofdstuk 2). Dit hoofdstuk behandelt precies die begrippen die voor het lezen van de syllabus van belang zijn. Dit hoofdstuk is geen onderdeel van de cursus. Wie op de middelbare school (of ergens anders) al eens met verzamelingen, doorsnedes, verenigingen e.d. te maken heeft gehad, kan dit hoofdstuk rustig overslaan.

Tenslotte dank aan de vakgroep logica voor de gezelligheid en in het bijzonder aan prof. dr. Dirk van Dalen, die een aanzienlijk deel van het materiaal voor Hoofdstuk 3 en 4 heeft geleverd (en die sowieso wel als bron van inspiratie mag worden opgevoerd). Verder dank aan Mathijs voor de noeste correctie-arbeid en aan alle niet nader te omschrijven 'background support'. En last but not least dank aan alle studenten waarop ondergetekende de afgelopen jaren zijn (vermeende) didactische kwaliteiten heeft kunnen botvieren en die aanzienlijk hebben bijgedragen aan het ontwikkelen van wat je zou kunnen noemen een 'visie op de didactiek van de logica'. Deze 'visie' vindt zijn neerslag in deze syllabus —ik hoop dat het vruchten zal afwerpen.

Succes en plezier toegewenst met je ontdekkingsreis door de Wonderlijke Wereld van de Logica.

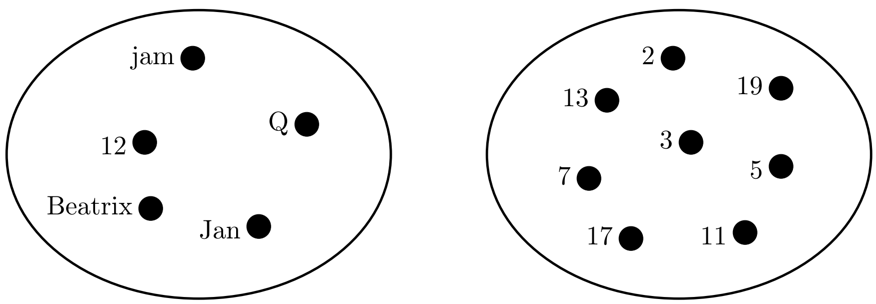
Hendrik Jan Veenstra, Utrecht, juli 1991

HOOFDSTUK 2

Verzamelingen

1. Minimale verzamelingenleer

Een verzameling is eigenlijk niets meer dan een willekeurige collectie individuen. Het doet er niet toe of deze individuen mensen, getallen, soorten broodbeleg of wat-dan-ook zijn. Voorbeelden van verzamelingen zijn:



Figuur 1. Twee willekeurige verzamelingen

Hoewel plaatjes tekenen leuker is, is het toch handiger om een aparte notatie voor verzamelingen te hebben. Een verzameling noteren we door de elementen ervan, door komma's gescheiden, tussen accolades te zetten. De bovenstaande verzamelingen kunnen we dus als volgt opschrijven: {jam, 12, Beatrix, Q, Jan} en $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. Meestal zullen we te maken hebben met verzamelingen waar enige 'logica' in zit. De eerste verzameling in bovenstaande figuur is (nogal) willekeurig, de tweede bevat precies de priemgetallen onder de twintig. Andere 'voor de hand liggende' verzamelingen zijn bijvoorbeeld alle Nederlanders, de machten van twee die kleiner zijn dan 100000, alle boeken in mijn boekenkast, etc.

Vaak zullen we willen zeggen dat een bepaald object in een verzameling zit. We zeggen dan dat dat object *element* van de verzameling is. Zo is 2 element van de verzameling getallen die kleiner dan 10 zijn. Voor het 'element zijn van' gebruiken we het symbool $\in$. Dus $2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Als iets niet een element is van een bepaalde verzameling noteren we dat aldus: $2 \notin \{1, 3, 5, 7, 9\}$. element

Merk overigens op dat verzamelingen ongeordend zijn. Dat wil zeggen dat de volgorde van de elementen er niet toe doet: de verzameling {0, 1, 2, 3} is dezelfde als {2, 0, 1, 3}. Bovendien bevat een verzameling geen dubbele elementen: de verzameling {0, 0} is dus identiek met de verzameling {0} (wat bevat {0, 0} immers anders dan 0?)

lege verzameling

Hoewel verzamelingen in principe objecten bevatten, is het natuurlijk heel wel denkbaar dat er een verzameling zou bestaan die niets bevat. Deze verzameling heet de *lege verzameling* en omdat wiskundigen zo blij waren toen ze deze verzameling ontdekten heeft hij zelfs een eigen symbool gekregen: $\varnothing$. Realiseer je dat er precies één lege verzameling bestaat (waarom?). Samenvattend:

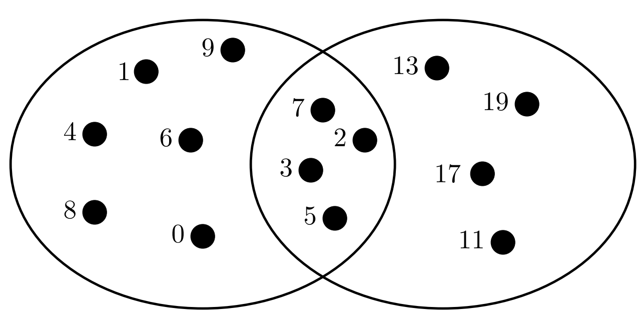
Notatie: $x \in A$: x is een *element* van A ($x \notin A$: x is geen element van A),
$\varnothing = \{\}$.

We zagen al dat we verzamelingen kunnen noteren door alle elementen tussen accolades te zetten. Dit zal echter een probleem worden zodra we met erg grote (of zelfs oneindige) verzamelingen te doen krijgen. Als een verzameling een logische samenhang vertoont (wat zo goed als altijd het geval zal zijn) zijn er enige alternatieve manieren om verzamelingen te noteren:

- 'De verzameling van alle boeken in mijn boekenkast' is een afkorting voor {Winnie de Poeh, Tao Te Ching, Parallel Distributed Processing, ...};
- $\{x \mid x \leq 5\}$ is een afkorting voor de verzameling $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Lees dit als 'de verzameling van alle x waarvoor geldt dat x kleiner dan 5 is'. We hebben hier impliciet gelaten dat de variable 'x' waarden in de natuurlijke getallen aanneemt;
- $\{x \mid x \geq 20$ en x is oneven$\}$ is een notatie voor de verzameling oneven getallen boven de twintig (een oneindige verzameling dus);
- $\{x \mid x \leq 2$ of $17 < x < 20\}$ staat voor $\{0, 1, 2, 18, 19\}$;
- ω is een standaard afkorting voor de verzameling natuurlijke getallen $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Merk op dat, zelfs al is met {32, 64, 128, 256, 512} een zekere verzameling keurig aangegeven, dezelfde verzameling veel begrijpelijker wordt weergegeven als 'alle machten van 2 tussen 30 en 1000'. De karakterisering van een verzameling door een geschikte eigenschap blijft nu eenmaal makkelijker in ons hoofd zitten.

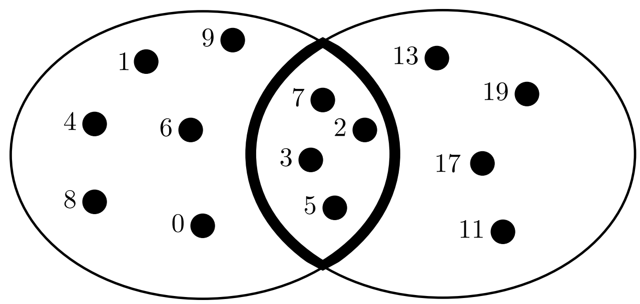
Nu we weten wat verzamelingen en elementen zijn kunnen we gaan kijken wat we met verzamelingen kunnen doen. Laten we eens twee verzamelingen nemen: de verzameling getallen onder de 10 en de verzameling priemgetallen onder de 20. Hieronder staan ze getekend.



FIGUUR 2. $\{x \mid x < 10\}$ en $\{x \mid x < 20$ en x is een priemgetal$\}$

Je ziet dat de twee verzamelingen door elkaar getekend zijn, zodat elementen die in beide verzamelingen zitten maar één keer getekend hoeven te worden. Vaak zijn we geïnteresseerd in precies die elementen die in beide verzamelingen tegelijk zitten. We noemen dit de *doorsnede* van twee verzamelingen. Als we de bovenstaande verzamelingen A en B noemen, dan noteren we de doorsnede van A en B als $A \cap B$. Hieronder is dik omlijnd $A \cap B$ weergegeven.

doorsnede



FIGUUR 3. $\{x \mid x < 10\} \cap \{x \mid x < 20 \text{ en } x \text{ is een priemgetal}\}$

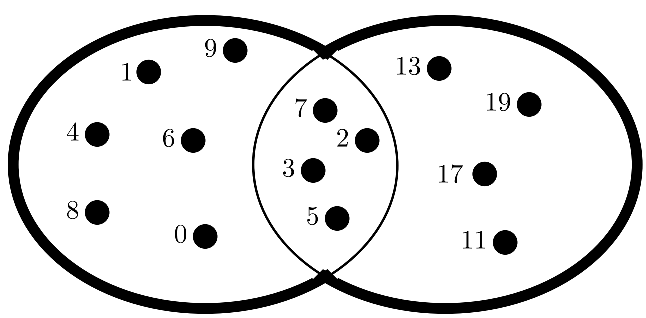
Dus $\{x \mid x < 10\} \cap \{x \mid x < 20 \text{ en } x \text{ is een priemgetal}\} = \{2, 3, 5, 7\}$. De doorsnede van twee verzamelingen is uiteraard zelf ook weer een verzameling. Bedenk je nogmaals dat, ook al komen de elementen van de doorsnede in beide verzamelingen voor, ze toch maar één keer in de doorsnede zitten, omdat een verzameling geen dubbele elementen bevat. Als we 'doorsnede' formeel definiëren krijgen we:

DEFINITIE 1.1. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$. ❑

Uit deze definitie volgt meteen dat de doorsnede niet noodzakelijk elementen hoeft te bevatten: de doorsnede van $\{0, 1\}$ en $\{10\}$ is leeg, oftewel: $\{0, 1\} \cap \{10\} = \varnothing$. Hier hebben we nog een argument om $\varnothing$ als een volwaardige verzameling te erkennen.

Vaak ook willen we kunnen praten over de som van twee verzamelingen. Dit is de verzameling die alle elementen uit twee verzamelingen bevat. We noemen dit de *vereniging* van twee verzamelingen. Als we weer de bovenstaande verzamelingen A en B noemen, dan noteren we de vereniging van A en B als $A \cup B$ ($\cup$ereniging). Hieronder is dik omlijnd de vereniging van A en B weergegeven.

vereniging



FIGUUR 4. $\{x \mid x < 10\} \cup \{x \mid x < 20 \text{ en } x \text{ is een priemgetal}\}$

Bedenk je wel dat het natuurlijk helemaal niet nodig is dat verzamelingen gemeenschappelijke elementen bevatten om er de vereniging van te kunnen nemen: $\{0,1,2\} \cup \{5,6\} = \{0,1,2,5,6\}$. Vereniging in een officieel jasje:

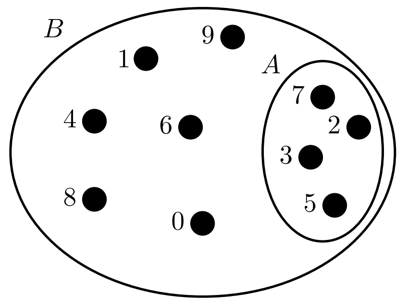
DEFINITIE 1.2. $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$ ❑

deelverzameling

Een laatste begrip dat voor ons hier van belang is, is het begrip *deelverzameling*. Een verzameling A is een deelverzameling van een verzameling B als alle elementen van A ook elementen van B zijn (oftewel: als A helemaal in B zit). We noteren dit als $A \subseteq B$.

DEFINITIE 1.3. $A \subseteq B$ dan en slechts dan als (desda) voor alle x, $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ (lees $\Rightarrow$ als 'impliceert') ❑

Hieronder een voorbeeld.



FIGUUR 5. $A := \{x \mid x < 10 \text{ en } x \text{ is een priemgetal}\} \subseteq \{x \mid x < 10\} =: B$

reflexiviteit

Uit de definitie volgt dat iedere verzameling een deelverzameling van zichzelf is (ga dit na). We zeggen dat de relatie $\subseteq$ *reflexief* is. Tevens volgt dat de lege verzameling een deelverzameling van iedere verzameling is: stel maar dat $\varnothing$ geen deelverzameling is van A, dan zou je een element van $\varnothing$ moeten kunnen vinden dat niet in A zit. Omdat $\varnothing$ geen elementen bevat, bestaat zo'n element niet. Ergo $\varnothing \subseteq A$. De deelverzamelingen van$\{0,1,2\}$ zijn dus $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1,2\}$, en $\{0,1,2\}$. Net zoals we voor 'element van' de tegenhanger 'niet element van' hebben, zo hebben we ook de tegenhanger van 'deelverzameling van': 'niet deelverzameling van' (jawel!). 'A is niet een deelverzameling van B' noteren we als $A \not\subseteq B$. Als we het willen hebben over echte deelverzamelingen of strikte deelverzamelingen A van B (dit zijn de deelverzamelingen A van B behalve B zelf) dan noteren we $A \subset B$. Dus:

echte deelverzameling

strikte deelverzameling

DEFINITIE 1.4. $A \subset B$ dan en slechts dan als $A \subseteq B$ en $A \neq B$. ❑

gelijk

identiteit

Het volgende lijkt zo flauw dat het wel eens over het hoofd gezien wordt: waarom is de verzameling van gelijkzijdige driehoeken gelijk aan de verzameling van driehoeken met uitsluitend hoeken van 60°? Antwoord: omdat ze precies dezelfde elementen bevatten. Moraal: verzamelingen zijn gelijk als ze dezelfde elementen hebben. De identiteit van een verzameling wordt bepaald door z'n elementen. Populair gezegd: een verzameling wordt volledig bepaald door zijn elementen (en niet door een min of meer toevallige beschrijving).

DEFINITIE 1.5. $A = B$ dan en slechts dan als voor alle x, $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$. ▯

We weten nu voldoende van verzamelingen om de rest van deze syllabus te lezen.

2. Samenvatting

Een verzameling is een ongeordende collectie willekeurige objecten.
Notatie: $\{\text{object}_1, \text{object}_2, \text{object}_3, \ldots\}$.

'x is element van V': $x \in V$.

'x is geen element van V': $x \notin V$.

Lege verzameling: $\varnothing$

De verzameling van alle x, waarvoor geldt dat x kleiner is dan 5: $\{x \mid x < 5\}$.

We vatten de voorafgaande definities samen.

Doorsnede: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$.

Vereniging: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$

Deelverzameling: $A \subseteq B$ desda voor alle x, $x \in A \Rightarrow x \in B$ (lees $\Rightarrow$ als 'impliceert')

Echte deelverzameling: $A \subset B$ dan en slechts dan als $A \subseteq B$ en $A \neq B$.

Identiteit $A = B$ dan en slechts dan als voor alle x, $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

3. Opgaven

We bezien deelverzamelingen A, B, C van een vast gegeven verzameling V. Ga de waarheid van de volgende beweringen na

i. $A = B$ dan en slechts dan als $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$.

ii. Als $A \subseteq B$ en $B \subseteq C$, dan $A \subseteq C$. (transitiviteit van $\subseteq$). transiviteit

iii. $A \subseteq B$ dan en slechts dan $A \cup B = B$.

iv. $A \subseteq B$ dan en slechts dan $A \cap B = A$.

v. $x \in A$ en $x \in B \Rightarrow (A \cap B) \neq \varnothing$.

vi. $A \subseteq (A \cup B)$.

vii. $(A \cap B) \subseteq A$.

viii. $A \cup \varnothing = A$.

ix. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

x. $A \cup V = V$.

xi. $A \cap V = A$.

xii. $A \cup A = A$. (idempotentie van vereniging) idempotentie

xiii. $A \cap A = A$. (idempotentie van doorsnede) commutativiteit

xiv. $A \cup B = B \cup A$. (commutativiteit van vereniging)

xv. $A \cap B = B \cap A$. (commutativiteit van doorsnede)

associativiteit

xvi. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. (associativiteit van vereniging)

xvii. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. (associativiteit van doorsnede)

distributiviteit

xviii. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. (distributiviteit van doorsnede over vereniging)

xix. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. (distributiviteit van vereniging over doorsnede)

xx. Geef zoveel mogelijk analogieën en disanalogieën tussen $\varnothing, V, \cup, \cap, \subseteq$ en $0, 1, +, \times, \leq$.

HOOFDSTUK 3

Inleiding

1. Wat zijn proposities?

De eenvoudigste taaluitingen die men zich kan voorstellen zijn beweringen zoals:

- Utrecht is groot;
- Alle mensen zijn gelijk;
- $3 + 7 = 12$;
- Veel is lekker;
- Uit het oogpunt van regeringsverantwoordelijkheid bezien is de relocatie van de herbezettingsgeldenquota niet langer onvoorwaardelijk af te wijzen;
- Jantje zag eens pruimen hangen;
- De boom stond in de tuin.

Je zou kunnen denken dat uitingen als ‘hè!’, ‘ach’, ‘laat dat’, etc., veel eenvoudiger zijn, maar na enig nadenken zie je dat de eerste soort makkelijker geïnterpreteerd kan worden dan de tweede en dat de eerste soort zich makkelijker laat samenstellen tot complexere uitingen, zoals we dat in de taal gewend zijn: ‘Jantje zag eens pruimen hangen en de boom stond in de tuin’ heeft niets vreemds. Een samenstelling als ‘hè en ach’ kan daarentegen nauwelijks tot de zinnige taaluitingen gerekend worden.

De eerste soort uitspraken noemen we beweringen of proposities (statements, propositions). Het verschil tussen ‘Utrecht is groot’ en ‘hè!’ zal duidelijk zijn: ‘Utrecht is groot’ is waar of onwaar (afhankelijk van wat je onder ‘groot’ verstaat), terwijl ‘hè!’ niet als waar of onwaar opgevat kan worden. ‘Waar’ en ‘onwaar’ noemen we waarheidswaarden die we in het vervolg zullen aangeven met een ‘1’ voor ‘waar’ en een ‘0’ voor ‘onwaar’ (een alternatieve notatie is $\mathtt{t}$ (true) en $\mathtt{f}$ (false)). In tegenstelling tot andere talige uitingen, hebben proposities waarheidswaarden. propositie

waarheidswaarde

Definitie 1.1. Een propositie is een talige uiting die de waarheidswaarde 0 (false) of 1 (true) heeft. ❏

De bovenstaande definitie komt van Gottlob Frege die dit inzicht in 1892 als volgt formuleerde:

> So werden wir dahin gedrängt, den Wahrheitswert eines Satzes als seine Bedeutung anzuerkennen. Ich verstehe unter dem Wahrheitswerte eines Satzes den Umstand, das er wahr oder das er falsch ist. ([**Fre75**])

Zowel de logica als de taal houden natuurlijk niet op bij proposities. Andere categorieën zinnige taaluitingen zijn bijvoorbeeld vragen, bevelen, etc. Maar omdat er aan proposities al een heleboel te beleven is, zullen we ons voorlopig beperken tot de studie van deze taalobjecten.

Als 'tussendoortje' een paar waarschuwingen. Met 'een propositie heeft een waarheidswaarde' bedoelen we '. . . in principe'. Wij hoeven nog niet te weten of de uitspraak '2984738290119992383774383983 is een priemgetal' waar is of niet, maar dat doet niets toe of af aan haar principiële (on)waarheid. In een absolute, van ons onafhankelijke zin, is deze uitspraak waar of onwaar. De notie van een propositie met het bijbehorende waarheidsbegrip is dus sterk platonistisch. Hoewel er ook niet-platonistische waarheidsbegrippen bestaan, zullen we ons hier beperken tot de platonistische variant omdat deze het eenvoudigst is. Bij het gebruik van zo'n absoluut waarheidsbegrip moeten we op onze hoede zijn voor twijfelgevallen. Ter illustratie beschouwen we hieronder twee van die twijfelgevallen:

'$x + 5 = 7$'. Is dit een propositie? Dat wil zeggen: is '$x + 5 = 7$' in principe waar of onwaar? Volgens de 'platonistische definitie' zou een persoon met een onbeperkt kenvermogen dus moeten kunnen zeggen of '$x + 5 = 7$' waar is of onwaar. Het probleem is dat, hoeveel zo'n persoon ook weet, hij —principieel— niet kan weten waar de x voor staat, waardoor de waarden van $x + 5$ en 7 niet vergeleken kunnen worden. We moeten vaststellen dat de waarheidswaarde van '$x + 5 = 7$' niet is vast te stellen en dat dus '$x + 5 = 7$' geen propositie is.

'Morgen worden er in Utrecht 34 kinderen geboren'. Bij het beantwoorden van de vraag of dit een propositie is moeten we ons afvragen of er een methode is om in principe de waarheidswaarde van deze uitspraak vast te stellen. De makkelijkste manier is om twee dagen te wachten. Dan weten we hoeveel kinderen er geboren zijn en kunnen we zeggen dat eergisteren 'morgen worden er in Utrecht 34 kinderen geboren' waar (of onwaar) was. Het is duidelijk dat deze manier niet helemaal eerlijk is. Als we vragen of 'morgen worden er in Utrecht 34 kinderen geboren' waar is, willen we nu een antwoord—de tijd mag geen rol spelen. Maar als we van mening zijn dat, onafhankelijk van ons, de genoemde zin waar of onwaar is, dan doen we een beroep op een vorm van determinisme. Daar is op zich natuurlijk niets op tegen, maar het geeft wel aanleiding tot allerlei vervelende problemen. Bovendien zouden we dan moeten besluiten dat genoemde zin wel of niet een propositie is, afhankelijk van onze filosofie, en daar willen we liever toch niet toe overgaan.

Taal is een samenstel van symbolen, woorden, zinnen en regels die over symbolen, etc. gaan. Ruw gezegd gaat de taal over (en bestaat uit) rijtjes symbolen (inclusief de spatie) en hun gedrag onder allerlei manipulaties. De vraag is nu of een propositie iets in de taal is of iets anders. Wanneer we Frege's opvatting volgen, dan zeggen we dat een propositie een gedachte is, die in de taal door een uitdrukking of volzin wordt weergegeven. De betekenis van de volzin (Sinn, meaning) is dan de gedachte of propositie, terwijl de verwijzing (denotatie, Bedeutung, reference) de waarheidswaarde van de propositie is.

Wij zullen echter genoegen nemen met een eenvoudiger standpunt en een propositie opvatten als behorend tot de taal zelf. Voor zover onze opvatting té eenvoudig is, zal deze later verfijnd worden.

Nu heeft een propositie, zoals wij die hier zullen opvatten, twee rollen: hij wordt gemaakt en gemanipuleerd door de grammatica, —dat is zijn rol in de taal— en hij heeft een waarheidswaarde —en hier ontstijgt hij aan de taal. We zeggen dat een propositie respectievelijk een syntactisch (vorm) en een semantisch (betekenis) aspect heeft. Deze twee aspecten zullen we gaan bestuderen, niet door de taalkunde nog eens dunnetjes over te doen, maar door de belangrijkste aspecten te isoleren en die in een kunsttaal te bezien. Het zal geen verbazing wekken dat deze kunsttaal de propositielogica zal zijn.

grammatica
syntaxis
semantiek

2. Samengestelde zinnen en voegtekens

Zowel een kunsttaal als een natuurlijke taal bevat uitdrukkingen of woorden. Dit zijn rijtjes symbolen die door een al dan niet eenvoudige grammatica gegenereerd en behandeld worden. De grammatica bepaalt dan ook of een woord een 'legaal' woord is of niet. Zo is 'prolkwtszt' geen goed Nederlands woord omdat er in het Nederlands geen woorden kunnen bestaan die op 'kwtszt' eindigen. 'Darfikollig' is echter wel een legaal woord —ook al betekent het (naar mijn beste weten) niets.

Omdat we er niet op uit zijn om taalkunde te bedrijven, kiezen we voor de makkelijkste oplossing: woorden zijn de dingen die in een woordenboek staan —en wat bij een kunsttaal zo aantrekkelijk is: we maken dat woordenboek zelf!

Woorden zijn de kleinste betekenisvolle onderdelen van een taal. In de propositielogica wordt de rol van woorden gespeeld door atomaire proposities, of kortweg atomen. Een atoom is het kleinste onderdeel dat je nog een propositie kunt noemen. Zo is 'Utrecht is groot' een atoom in de omgangstaal omdat het niet op te splitsen is in delen die zelf ook een propositie zijn. 'Utrecht is groot en Jantje zag eens pruimen hangen' is echter geen atoom, omdat het twee onderdelen bevat die ieder weer een propositie zijn: 'Utrecht is groot' en 'Jantje zag eens pruimen hangen'.

atomaire proposities

Zoals uit het bovenstaande al blijkt, kunnen we grotere proposities uit kleinere maken door ze op een bepaalde manier 'aan elkaar te plakken'. Voor het maken van zulke samengestelde zinnen gebruiken we in de taal voegtekens, zoals 'en', 'of', 'niet', 'evenwel', 'maar', 'tenzij', 'als. . . dan', . . . Nu zijn er in de taal zoveel voegtekens dat we een helder criterium moeten hebben om te bepalen welke voegtekens wél en welke niét mogen meedoen. Het voor de propositielogica geschikte criterium is tamelijk voor de hand liggend: een voegteken is toelaatbaar als het van meerdere kleinere proposities een (grotere) propositie maakt. Oftewel: de uitdrukking die ontstaat door onderdelen samen te voegen die in principe waar of onwaar zijn, moet zelf ook weer in principe waar of onwaar zijn. Dit 'waar of onwaar zijn' moet bovendien uitsluitend afhankelijk zijn van de (on)waarheid van de samenstellende onderdelen. Voegtekens die zich ten aanzien van dit criterium netjes gedragen noemen we waarheidsdefiniet.

samengestelde zinnen
voegteken
waarheidsdefiniet

VOORBEELD 2.1. i. 'en' is een waarheidsdefiniet voegteken. De waarheid van 'A en B' volgt immers direkt uit de waarheid van A en die van B: als beide waar zijn is 'A en B' ook waar. Anders is 'A en B' onwaar.

ii. 'of' is waarheidsdefiniet: 'A of B' is waar dan en slechts dan als tenminste één van beide waar is.

iii. 'niet'is waarheidsdefiniet, want 'niet A' is waar als A niet waar is.

iv. 'tenzij' is ook waarheidsdefiniet. Immers 'ik kom tenzij het regent' betekent 'ik kom en het regent niet of ik kom niet en het regent'. Dat wil zeggen dat 'A tenzij B' waar is als A en B tegengestelde waarheidswaarden hebben.

v. 'het is bekend dat' is niet waarheidsdefiniet. De waarheid van 'ik ben een slechte student' zegt nog niets over de waarheid van 'het is bekend dat ik een slechte student ben' (en dat is voor sommigen maar beter ook).

vi. 'omdat' is niet waarheidsdefiniet, omdat (!) de waarheid van een uitspraak als 'de straat is nat omdat het regent' niet alleen afhankelijk is van de waarheid van de samenstellende delen, maar ook van het al dan niet waar zijn van het causale verband tussen deze twee.

❑

Na deze inleiding over wat proposities zijn, wordt het tijd dat we eens gaan kijken naar wat de logica hiermee van doen heeft.

3. Samenvatting

Een propositie is een taalkundige uiting die de waarheidswaarde 0 (false) of 1 (true) heeft.

Een atomaire propositie is een propositie die niet verder op te splitsen is in delen die zelf ook proposities zijn.

Een samengestelde propositie is een propositie die bestaat uit atomaire proposities die door waarheidsdefiniete voegtekens verbonden worden.

Een waarheidsdefiniet voegteken is een voegteken dat van kleinere proposities een grotere propositie maakt, waarvan het al dan niet waar zijn uitsluitend afhankelijk is van het al dan niet waar zijn van de samenstellende onderdelen.

4. Opgaven

Welke van de volgende zinnen zijn proposities? Welke zijn atomair en welke samengesteld? Onderstreep in de samengestelde proposities de samenstellende proposities.

1. Vanochtend werd gezegd dat het morgen eindelijk weer lekker weer zal worden.
2. Hoewel het KNMI over buitengewoon geavanceerde apparatuur beschikt, heb ik toch de indruk dat de weersvoorspellingen vaak niet uitkomen.
3. Zou het eigenlijk wel leuk zijn om altijd precies te weten wat voor weer het de volgende dag wordt?
4. De fundamentele ongedetermineerdheid van het leven is juist dat wat het leven de moeite waard maakt.

5. Als alles voorspelbaar was, dan zou er nooit meer iets onverwachts gebeuren en zouden we vervallen in een saai ‘wachten op dat wat toch gaat gebeuren’.
6. Het is precies deze ongedetermineerdheid die zorgt dat de mens vrij is om keuzes te maken en het is ook precies deze ongedetermineerdheid die het mogelijk maakt om iets te leren.
7. Het kunnen maken van keuzes houdt in dat er lijden wordt veroorzaakt.
8. Ook de Boeddha zei al dat het leven lijden is.
9. Kan er dan geen lijden zijn als de mens niet vrij zou zijn om te kiezen?
10. Dat hangt waarschijnlijk af van je opvatting van lijden, maar ik denk dat binnen het boeddhisme lijden en keuze samengaan.
11. We moeten wel uitkijken dat we niet in een soort theologische discussie verzeild raken, want daar zijn logica-syllabi niet voor bedoeld, hoewel het natuurlijk helemaal geen kwaad kan om deze onderwerpen eens aan de orde te stellen, ook al zou dat misschien beter op een ander plaats kunnen gebeuren.
12. Zo'n verhandeling is tenminste weer eens iets anders dan Angelsaksische filosofie.
13. Filosofen verzanden vaak in het ‘spijkers op filosofisch laag water zoeken’, terwijl er toch voldoende betekenisvolle vragen te stellen zijn, maar waarschijnlijk zijn filosofen zelf niet de schuldigen, maar ligt het probleem in de gehanteerde ‘wetenschappelijke methode’.
14. Men vergeet dat het rationele denken slechts een hoogontwikkeld stuk gereedschap is dat behulpzaam kan zijn bij het stellen en beantwoorden van bepaalde vragen, maar dat dit denken niet een doel op zich is, noch de ultieme methode belichaamt om iedere denkbare vraag mee te lijf te gaan.
15. Zoals zo veel is ook het menselijk denken begrensd en dus zal het terrein van toepassing ook begrensd zijn, evenals de validiteit van de verkregen antwoorden.
16. Dit is de zestiende zin en zestien is twee tot de vierde en omdat dat een mooi getal is, stoppen we hier maar.
17. Nou ja, nog een laatste dan.

HOOFDSTUK 4

Syntax van de propositielogica

"When I use a word", Humpty Dumpty said, in a rather scournful tone, "it means just what I choose it to mean —neither more nor less."

Lewis Carroll, Through the lookingglass

1. Het alfabet

Het ligt voor de hand dat de propositielogica zich wil bezig houden met het formaliseren van het redeneren met proposities. Zoals we zagen zijn proposities talige uitingen die de waarheidswaarden 0 (onwaar) of 1 (waar) kunnen hebben. We hebben een onderscheid gemaakt tussen atomaire proposities (atomen) en met behulp van voegtekens samengestelde proposities. Om handig met deze begrippen en onderscheiden te kunnen werken, wordt gebruik gemaakt van een aan de wiskunde verwante taal. Zo'n taal heet een formele taal en bestaat uit symbolen, regels om rijtjes symbolen te vormen (grammatica, syntaxis), bewerkingen op die (rijtjes) symbolen en afspraken over de betekenis van de symbolen. formele taal

Om te beginnen moeten we constateren dat we hier geïnteresseerd zijn in het (waarheids-)gedrag van (samengestelde) proposities en redeneringen met behulp van proposities en niet in het al dan niet waar zijn van de inhoud van de proposities. We willen bijvoorbeeld kunnen laten zien dat de volgende redenering geldig is: als het regent wordt de straat nat en het regent, dus de straat wordt nat. Of 'als het regent wordt de straat nat' nu echt waar is, is niet van belang voor de geldigheid van deze redenering. Bovenstaande redenering is dus geldig ongeacht de inhoud van de proposities —om deze reden is de volgende redenering net zo geldig: 'als het poerufbat dan grollimbert het en het poerufbat, dus het grollimbert' (herinner je je Marten Toonder?). Om deze reden besluiten we om proposities niet langer voluit te schrijven, maar aan te duiden met letters. Bovenstaande redenering wordt dan iets als: als p_0 dan p_1 en p_0 , dus p_1 (dat is meteen ook een stuk minder schrijfwerk). Deze propositieletters of propositievariabelen zijn de eerste symbolen van onze formele logische taal en staan voor atomaire proposities. De propositieletters hebben net zo'n soort functie in de logica als de letters a, b, ... in de wiskunde: '$a + b$' kan staan voor iedere optelling van twee getallen a en b —we hoeven niet te weten voor welke optelling precies als we geïnteresseerd zijn in de waarheid van '$a + b = b + a$' —deze uitspraak is waar, ongeacht wat we voor a en b invullen. propositieletter propositievariabele atomaire proposities

Aangezien proposities worden samengesteld met voegtekens ligt het voor de hand om voor deze voegtekens ook symbolen te gebruiken. Laten we niet langer om de hete brij heen draaien: hieronder volgt de definitie van wat een alfabet van de propositielogica is. Uitleg van de betekenis van de diverse tekens volgt daarna. alfabet

DEFINITIE 1.1. Een alfabet van de propositielogica bestaat uit:

1. een verzameling propositieletters: $p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$.
2. één propositieconstante: $\bot$
3. voegtekens: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
4. hulptekens: (,)

voegteken

❑

NB. In de logica (en daar niet alleen) worden termen geleend uit andere vakgebieden. De betekenis wordt zonder pardon door ons ter plaatse vastgesteld. Zo heeft het 'logische alfabet' weinig met het gewone alfabet te maken, maar evenals zijn taalkundige naamgenoot bestaat het uit de kleinste bouwstenen. Evenzo heeft 'atoom' in de logica niets van doen met die kleine dingetjes in de scheikunde.

We hebben net al gezegd dat de propositieletters voor atomaire proposities staan. We kunnen bijvoorbeeld zeggen dat p_0 = 'Jantje zag alweer pruimen hangen', p_1 = 'Schrijver dezes zat deze zin op een vroege donderdagmorgen te typen', etc. Zo'n afspraak over wat de propositieletters betekenen noemen we een vertaalsleutel: hij verzorgt de vertaling van logische symbolen naar de 'gewone' wereld. In het volgende hoofdstuk zullen we ons uitgebreid met vertalingen en vertaalsleutels bezig houden.

vertaalsleutel

Meestal zullen we stilzwijgend aannemen dat er oneindig veel propositieletters zijn. Soms is het echter wel prettig om met eindig veel propositieletters te werken. Daarom laten we een kleine variatie toe in wat het alfabet zou kunnen zijn.

falsum

De propositieconstante $\bot$ staat voor de altijd onware propositie en heet falsum. Dus de waarheidswaarde van falsum is altijd 0 (denk aan falsum als een op z'n kop staande T van true). Waarom zo'n merkwaardige constante handig is, zal verderop blijken.

In de propositielogica gebruiken we vijf voegtekens. We zouden met minder hebben kunnen volstaan —en we hadden er ook meer kunnen definiëren. Deze vijf vormen echter een soort gemiddelde tussen efficiëntie (zo weinig mogelijk) en maximale leesbaarheid (voor ieder talig voegteken een apart logisch voegteken). We zullen later zien dat we met behulp van deze voegtekens alle denkbare andere voegtekens kunnen definiëren (zie Paragraaf 7.4.1). De betekenis van de voegtekens is achtereenvolgens:

$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
niet	en	of	als...dan (pijl)	dan en slechts dan als (dubbele pijl)

Zo kunnen we dus samengestelde proposities maken als $\neg p_0$: 'het is niet zo dat p_0'; $(p_0 \wedge p_1)$: 'p_0 en p_1'; $(p_0 \rightarrow p_1)$: 'als p_0 dan p_1'. Het door elkaar heen gebruiken van de voegtekens levert nog ingewikkelder proposities op, zoals bijvoorbeeld:

$$((p_0 \wedge p_1) \rightarrow ((p_{35} \vee p_0) \leftrightarrow (\neg p_{18} \wedge \neg(p_1 \vee p_{13})))).$$

Het gebruik van p_0, p_1, ... is niet altijd even handig. We zullen daarom afspreken om ook de letters p, q, r, s toe te staan (aan deze vier zullen we meestal genoeg hebben; zo niet, dan kunnen we accenten toevoegen om nieuwe letters te creëren: p', p'', etc.).

De laatste groep tekens van ons alfabet zijn de haakjes. We hebben ze hierboven al gebruikt en hun nut zal duidelijk zijn: ze dienen om binnen een samengestelde propositie de 'bij elkaar horende' gedeelten van andere gedeelten te scheiden. Net zoals $((2 + 3) \cdot 4)$ iets anders is als $(2 + (3 \cdot 4))$, zo is $((p \wedge q) \vee r)$ iets anders dan $(p \wedge (q \vee r))$.

2. De syntaxis

Zoals te verwachten valt, is niet iedere rij tekens uit het alfabet een correcte propositie: $p_0 p_{12} \vee \leftrightarrow)(p_3$ betekent niets. De grammatica van de propositielogica verbiedt dan ook de vorming van zulke zinloze rijtjes —net zoals de Nederlandse grammatica het woord 'prolkwtszt' niet toestaat (zie par. 1.2). De verzameling van correcte rijtjes symbolen noemen we de verzameling formules, kortweg FOR. Hieronder volgt de definitie van FOR. formules van de propositielogica

DEFINITIE 2.1. De verzameling formules FOR van de propositielogica is de kleinste verzameling die voldoet aan het volgende:

1. $p_i \in \mathsf{FOR}$, met $i = 0, 1, \ldots$
2. $\bot \in \mathsf{FOR}$
3. als $A \in \mathsf{FOR}$, dan ook $\neg A \in \mathsf{FOR}$
4. als $A, B \in \mathsf{FOR}$, dan ook $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B) \in \mathsf{FOR}$.

❑

Clausule 1 en 2 zeggen dat alle propositieletters en falsum correcte formules zijn. Deze clausules zijn de basisclausules van de definitie. Ze vertellen ons wat in eerste instantie een formule is. Volgens clausule 3 mogen we een $\neg$ voor een formule zetten. De formule die we dan krijgen heet de negatie van de 'oude' formule. Volgens clausule 4 tenslotte mogen we formules 'aan elkaar plakken' met de overige voegtekens. Clausules 3 en 4 stellen ons in staat om nieuwe formules te genereren uit andere. basisclausules negatie genereren

In het begin van de definitie is sprake van 'de kleinste verzameling'. Dit betekent dat niets een formule is dan op grond van clausules 1 t/m 4. Bijvoorbeeld ")$p_1$7(" is geen formule omdat je haar volgens het recept 1 t/m 4 niet kunt maken.

De definitie hierboven is een *inductieve definitie*. De verzameling formules is een *inductieve totaliteit*, omdat zij met een inductieve definitie gecreëerd is. Meer informatie over inductieve definities is te vinden in het dictaat *Parvulae Logicales Inductie*. inductieve definitie inductieve totaliteit

Een paar termen:

- De formule $(A \wedge B)$ heet de conjunctie van A en B. A en B zijn de conjuncten. conjunctie

disjunctie
- $(A \vee B)$ heet de disjunctievan A en B (die op hun beurt de disjuncten heten).

implicatie
- $(A \to B)$ heet een implicatie, waarvan A het antecedent en B het consequent is.

bi-implicatie.
- $(A \leftrightarrow B)$ heet bi-implicatie.

subformules

Bedenk dat, omdat bij clausule 3 en 4 staat 'als $A, B \in \mathsf{FOR} \ldots$', A en B dus voor complexe formules kunnen staan —niet alleen voor atomen. A en B heten subformules van de samengestelde formule. Ook de subformules van A en van B zijn subformules van de hele formule en ook weer hun subformules, etc. En net als bij verzamelingen een verzameling deelverzameling van zichzelf is, is hier een formule een subformule van zichzelf. Als de hele formule van de vorm $A \circledast B$ is, waarbij $\circledast \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, dan heet $\circledast$ het hoofdvoegteken van de formule. Als een formule als buitenste voegteken een $\neg$ heeft dan is de $\neg$ het hoofdvoegteken. M.a.w. het hoofdvoegteken is dat voegteken dat bij het opbouwen van de formule het laatst is toegevoegd.

hoofdvoegteken

unair
binair

Merk overigens op dat $\neg$ maar op één formule werkt, terwijl de andere voegtekens op twee formules werken. De $\neg$ heet daarom een unair (éénplaatsig) voegteken en de anderen heten binair (tweeplaatsig). Er zijn ook drie- en meerplaatsige voegtekens denkbaar, maar we zullen in par.4.4.1 zien dat we die allemaal kunnen maken met de vijf hier gegeven voegtekens.

Voorbeeld 2.2. Voorbeelden van correcte formules (waarbij we $p, q, \ldots$ gebruiken i.p.v. p_0, p_1, etc.):

p;

$\neg p$;

$(\neg p \to q)$;

$(\neg(\neg p \to q) \vee r)$;

$((\neg q \to \bot) \leftrightarrow (\neg(\neg p \to q) \vee r))$.

De formule $((\neg q \to \bot) \leftrightarrow (\neg(\neg p \to q) \vee r))$ heeft als hoofdvoegteken een $\leftrightarrow$.

De subformules van deze formule zijn: q, $\neg q$, $\bot$, $(\neg q \to \bot)$, r, p, $\neg p$, $(\neg p \to q)$, $\neg(\neg p \to q)$, $(\neg(\neg p \to q) \vee r)$ en $((\neg q \to \bot) \leftrightarrow (\neg(\neg p \to q) \vee r))$. ❑

Aangezien logici ook maar mensen zijn, hebben ze een paar afspraken gemaakt die ons het leven iets 'makkelijker' maken —oftewel enige notationele conventies:

voorrangsregels

Om te beginnen laten we vaak (meestal) de buitenste haakjes van een formule weg. We zullen dus $\neg p \to q$ schrijven in plaats van $(\neg p \to q)$. Ten tweede mogen we haakjes weglaten overeenkomstig de voorrangsregels voor de voegtekens. Deze voorrangsregels bepalen de bindingssterkte van de diverse voegtekens. Net zoals in de wiskunde de maal $(\times)$ sterker bindt dan de plus $(+)$, waardoor $2 \times 3 + 5$ gelezen wordt als $(2 \times 3) + 5$ en niet als $2 \times (3 + 5)$, zijn er in de propositielogica verschillen tussen de bindingssterkten van de voegtekens. Het 'meneer van Dalen wacht op antwoord' van de logica (oftewel de voegtekens in volgorde van sterk naar zwak) is: $\neg$, $\wedge\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$. De $\wedge$ en $\vee$ binden even sterk, net als de $+$ en $-$ in de wiskunde.

Voorbeeld:

Hieronder volgen een paar formules in twee versies: links de manier waarop wij ze mogen noteren; rechts de officiële notatie (met weglating van de buitenste haakjes).

$\neg p \to q \vee r$	$\neg p \to (q \vee r)$
$\neg(p \to q) \vee r$	$\neg(p \to q) \vee r$
$\neg(p \to q \vee r)$	$\neg(p \to (q \vee r))$
$(\neg p \to q) \vee r$	$(\neg p \to q) \vee r$
$\neg((p \to q) \vee r)$	$\neg((p \to q) \vee r)$
$p \wedge q \to \neg r \leftrightarrow s$	$((p \wedge q) \to \neg r) \leftrightarrow s$
$p \wedge (q \to \neg r) \leftrightarrow s$	$(p \wedge (q \to \neg r)) \leftrightarrow s$
$p \wedge q \to \neg(r \leftrightarrow s)$	$(p \wedge q) \to \neg(r \leftrightarrow s)$
$p \wedge (q \to \neg r \leftrightarrow s)$	$p \wedge ((q \to \neg r) \leftrightarrow s)$
$p \wedge (q \to (\neg r \leftrightarrow s))$	$p \wedge (q \to (\neg r \leftrightarrow s))$
$p \wedge q \to (\neg r \leftrightarrow s)$	$(p \wedge q) \to (\neg r \leftrightarrow s)$

Teveel haakjes weglaten komt echter ook de leesbaarheid niet ten goede en daarom zullen we dan ook vaak tóch... (ondergetekende ziet liever $((p \wedge q) \to \neg r) \leftrightarrow s$ staan dan $p \wedge q \to \neg r \leftrightarrow s$).

Nog een paar notationele kwesties:

We zullen het vaak over hele formules willen hebben, zonder precies te hoeven weten hoe zo'n formule er uit ziet. We gebruiken de hoofdletters A, B, C, etc., als variabelen voor willekeurige formules. Dus A kan bijvoorbeeld staan voor $((p_0 \wedge p_5) \to \neg p_{16})$ of voor $\neg\neg\neg\neg p_{738}$. Zo'n variabele hoort niet bij de logische taal, maar wordt gebruikt om *over* de logische taal te kunnen spreken —om bijvoorbeeld regelmatigheden in de logische taal te kunnen uitdrukken. Om deze reden heten deze variabelen dan ook metavariabelen. De A en B in definitie 2.1 waren dus metavariabelen. metavariabele

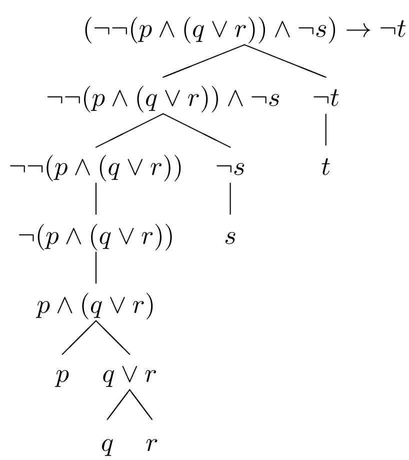
Deze metavariabelen kunnen we met de voegtekens net zo 'aan elkaar plakken' als gewone propositievariabelen. We krijgen dan dus uitdrukkingen als $A \wedge B \to C$. Bedenk je echter voortdurend dat dit geen uitdrukking van de propositielogica is, maar een uitdrukking van *onze taal* die functioneert als een metataal die over propositielogica gaat. Als we bijvoorbeeld beweren dat elke A een even aantal haakjes heeft, dan is dat een interessantere uitspraak dan te zeggen dat p_{13} een even aantal haakjes heeft. De formule p_{13} heeft nul haakjes, terwijl "A" elke formule als waarde kan hebben. 'Elke A heeft een even aantal haakjes' vertelt ons dus dat $\neg\neg p_7$ een even aantal haakjes heeft en $(p_8 \wedge (\neg p_{10} \vee p_7))$ en ... metataal

Sommige auteurs gebruiken Griekse letters voor metavariabelen.

We hebben nu dus propositievariabelen die voor atomaire proposities staan en die tot de taal van de propositielogica behoren. Daarnaast hebben we metavariabelen die voor hele formules staan en die niet tot de logische taal zelf behoren, maar tot de metataal. Alsof dat nog niet genoeg is willen we ook graag variabelen die voor hele verzamelingen formules staan —hun nut zal in de loop van deze syllabus duidelijk worden. We spreken af dat de Griekse hoofdletters Γ en Δ (gamma en delta) voor verzamelingen formules staan. Uiteraard zijn dit ook weer symbolen uit onze metataal. Dus bijvoorbeeld $\Gamma = \{A, C, D, G, J\}$, waarbij A, C, D, G en J weer metavariabelen over formules zijn.

3. Ontleedbomen

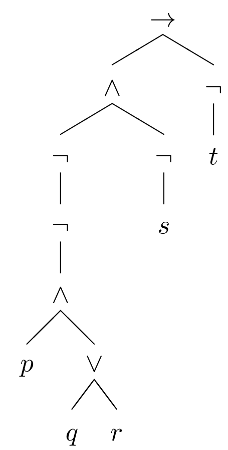
Er is nog een andere manier om met propositielogische formules om te gaan. We kunnen ze nl. ook afbreken —in de taalkunde heet dat ontleden. Je kunt het makkelijkst ontleden door de directe subformules onder de formule te schrijven in de vorm van een boom:



ontleedboom
parse tree

We noemen het bovenstaande de ontleedboom, of in het Engels, de *parse tree*, van de formule. Merk op dat alle subformules er in voorkomen. Merk bovendien op dat de ontleedboom Australisch is: hij groeit naar beneden. De bovenste knoop is de wortel en de onderste knopen zijn de bladeren.

We kunnen de ontleedboom ook op efficiëntere manier schrijven door in de niet-bladeren steeds alleen het hoofdvoegteken van de relevante subformule te schrijven.

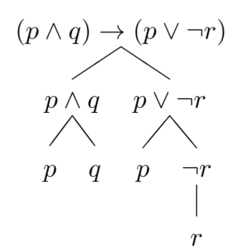


OPMERKING 3.1. * Een belangrijke notie is een *voorkomen* van een subformule in een formule. In het Engels noemen we dit een *occurrence*. We kunnen voorkomens op verschillende manieren definiëren maar de definitie met behulp van de ontleedboom is net en elegant. voorkomen

Een voorkomen van een formule B in een formule A is een knoop in de ontleedboom van A die B als label heeft. Hier hebben we het over een ontleedboom die op de eerste manier geschreven is. De formule die op de plaats van een knoop staat is het label.

Op dezelfde manier kunnen we voorkomens van een voegteken definiëren. Hiervoor gebruik je de boom zoals die in de tweede stijl geschreven is.

Bezie de formule $(p \wedge q) \to (p \vee \neg r)$. De heeft de volgende ontleedboom.



Merk op dat er twee voorkomens zijn van p en één van $\neg r$.

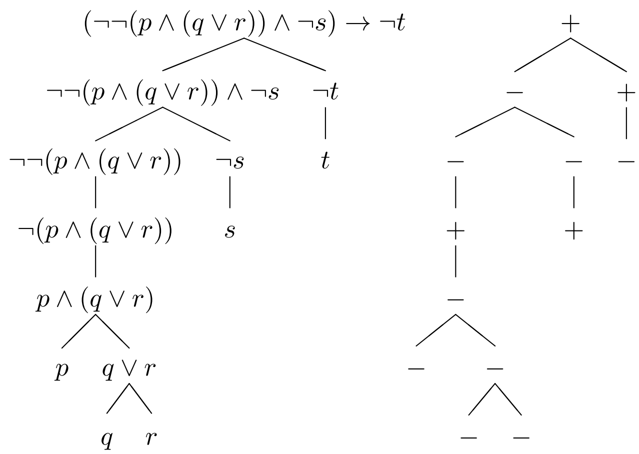
Een belangrijke notie is de *polariteit* van een voorkomen. Deze notie is betekenisvol voor formules zonder $\leftrightarrow$. We kunnen de polariteit van een voorkomen van een subformule in een formule zonder $\leftrightarrow$ als volgt berekenen. We vormen eerst de ontleedboom van de formule en werken van boven naar onderen. polariteit

a. De wortel (= bovenste knoop) wordt gelabeled met $+$.

b. Stel we hebben een knoop k al een label $+$ gegeven. Als het hoofdvoegteken in de knoop $\wedge$ of $\vee$ is, dan krijgen de directe opvolgers van de knoop ook label $+$. Als het hoofdvoegteken van de knoop $\neg$ is, dan krijgt de directe opvolger van de knoop het label $-$. Als het hoofdvoegteken van de knoop $\to$ is, dan krijgt de directe opvolger van de knoop aan de linkerkant het label $-$ —deze knoop correspondeert met het antecedent van de implicatie. De opvolger aan de rechterkant krijgt label $+$.

c. Stel we hebben een knoop k al een label $-$ gegeven. Als het hoofdvoegteken in de knoop $\wedge$ of $\vee$ is, dan krijgen de directe opvolgers van de knoop ook label $-$. Als het hoofdvoegteken van de knoop $\neg$ is, dan krijgt de directe opvolger van de knoop het label $+$. Als het hoofdvoegteken van de knoop $\to$ is, dan krijgt de directe opvolger van de knoop aan de linkerkant het label $+$. De opvolger aan de rechterkant krijgt label $-$.

Laten we nog eens de formule $(\neg\neg(p \wedge (q \vee r)) \wedge \neg s) \to \neg t$ bezien. Hier heb je onleedboom met in de tweede versie alleen de polariteiten aangegeven in de knopen.



We zien dat bijvoorbeeld de het unieke voorkomen van de subformule $\neg(p \wedge (q \vee r))$ positieve polariteit heeft. We zeggen dat het voorkomen *op een positieve plaats staat.*. Het voorkomen van $p \wedge (q \vee r)$ staat op een *negatieve plaats.* ❑

positieve plaats
negatieve plaats

Opmerking 3.2. * Merk op dat de plaatsing van de voegtekens ten opzichte de formules waarop ze werken steeds anders is. Dit is om te zorgen voor optimale leesbaarheid.

prefix notatie
infix notatie
postfix notatie

De negatie staat voor de formule: $\neg A$. Dat heet prefix notatie. De conjuctie staat tussen de formules in: $(A \wedge B)$. Dat heet infix notatie. Er is ook postfix notatie, maar die komt in de propositie logica niet voor. Als we de negatie in postfix notatie zouden schrijven zou het er zo uitzien: $A\neg$. Daar is niks tegen. Het is alleen ongebruikelijk.

Als we conjunctie in prefix notatie zouden schrijven zou het er zo uitzien: $\wedge(A, B)$.

unieke leesbaarheid
unique readability

Met de haakjesconventie zoals we die gegeven hebben (dus geen haakjes bij negatie en wel haakjes bij de binaire voegtekens die in infix notatie geschreven zijn, hebben we de eigenschap van *unieke leesbaarheid*, in het Engels: *unique readability*. Dat betekent dat we op eenduidige manier een formule kunnen ontleden. Er is bij elke formule een unieke ontleedboom. Je kunt bijvoorbeeld geen C en D vinden zodat $(A \wedge B) = (C \vee D)$.

Als we alle voegtekens in prefix schrijven hebben we unieke leesbaarheid zelfs zonder haakjes. Deze notatie wijze heet *Poolse notatie*. Deze notatie is uitgevonden door de Poolse logicus Jan Łukasiewicz in 1924. Zo ziet de formule $((p \wedge \neg(q \vee r)) \to (r \vee s))$ er op z'n Pools uit: $\to \wedge\, p \neg \vee q\, r \vee r\, s$. Poolse notatie is i.h.a. makkelijk te schrijven, maar moeilijk te lezen. ❑

Poolse notatie

4. Inductie & Recursie: Trailer

Voor inductief gedefinieerde totaliteiten zoals de formules van de propositielogica krijgen we twee dingen gratis bijgeleverd: een bewijsmethode *inductie*, en een definitiemethode *recursie*. Deze ideeën worden uitgebreid behandeld in het dictaat *Parvulae Logicales Inductie*. In dit dictaat komen onder meer de volgende begrippen ter sprake.

inductie
recursie

- inductie eigenschap.
- basisstap
- inductiestap
- inductiehypothese,
- Backus–Naur Form, of BNF
- unique reading
- desambiguering

inductie eigenschap
basisstap
inductiestap
inductiehypothese
Backus–Naur Form
BNF
unique reading
desambiguering

5. Samenvatting

Het alfabet van de propositielogica bestaat uit:

1. een (oneindige) verzameling propositieletters: $\{p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots\}$.
2. één propositieconstante: $\perp$ (falsum)
3. voegtekens: $\neg$ (niet), $\wedge$ (en), $\vee$ (of), $\to$ (als…dan), $\leftrightarrow$ (bi-implicatie)
4. hulptekens: (,)

De verzameling formules FOR van de propositielogica is de kleinste verzameling die voldoet aan het volgende:

i. $p_i \in \mathsf{FOR}$, met $i \geq 0$

ii. $\perp \in \mathsf{FOR}$

iii. als $A \in \mathsf{FOR}$, dan ook $\neg A \in \mathsf{FOR}$

iv. als $A, B \in \mathsf{FOR}$, dan ook $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \leftrightarrow B) \in \mathsf{FOR}$.

Voorrangsregels voor de voegtekens: de voegtekens in volgorde van sterk naar zwak bindend: $\neg$, $\wedge\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$.

Metavariabelen: de hoofdletters A, B, C, … staan voor willekeurige formules.

Verzamelingen formules: de Griekse hoofdletters Γ en Δ staan voor verzamelingen formules.

6. Opgaven

1. Welke van de volgende rijtjes symbolen zijn geen legale uitdrukkingen van de propositielogica (zonder notationele conventies) en waarom niet? (in plaats van p_0, p_1, etc. gebruiken we p, q, r, …)
   i. $(p \vee q) \leftrightarrow r$
   ii. $((p \to q) \to r)$
   iii. $((p\neg q) \wedge (r \vee s))$
   iv. $((p \leftrightarrow q)$
   v. $((\neg p \wedge q) \leftrightarrow (r \to (A \vee s)))$
   vi. $((p \to (q \leftrightarrow \neg r)) \wedge (\neg s \to \neg t))$
   vii. p
   viii. $((p) \vee r)$
   ix. $(A \vee B)$
   x. $((p \wedge (\neg\neg\neg(\neg\neg q \leftrightarrow (r \vee s)) \leftrightarrow t)))$
2. Hieronder staan formules waarvan, uitgaande van de voorrangsregels voor de voegtekens, zo veel mogelijk haakjes zijn weggelaten. Hoe moeten deze formules gelezen worden? Oftewel: plaats de weggelaten haakjes, zodat er weer een legale propositielogische uitdrukking staat.
   i. $\neg p \to q \vee r \leftrightarrow \neg s$
   ii. $\neg(p \to q \vee r) \leftrightarrow \neg s$
   iii. $\neg p \to (q \vee r \leftrightarrow \neg s)$
   iv. $(\neg p \to q) \vee r \leftrightarrow \neg s$
   v. $\neg p \to q \vee (r \leftrightarrow \neg s)$
   vi. $p \wedge \neg\neg q \leftrightarrow (r \vee s \leftrightarrow t)$
   vii. $p \wedge ((\neg\neg q \leftrightarrow r) \vee s) \leftrightarrow t$
   viii. $p \wedge \neg(\neg q \leftrightarrow r \vee s) \leftrightarrow t$
   ix. $(p \wedge \neg\neg q \leftrightarrow r) \vee (s \leftrightarrow t)$
   x. $(p \wedge \neg\neg q \leftrightarrow r) \vee s \leftrightarrow t$
3. Definiëer met recursie het aantal binaire voegtekens $\mathsf{b}(A)$ in een formule A. Bewijs met inductie dat $\mathsf{h}(A) = 2 \cdot \mathsf{b}(A)$.
4. * Bewijs de unieke leesbaarheid van de propositielogica.
5. * Waarom is er een probleem met polariteit wanneer we ook $\leftrightarrow$ in de taal hebben?

HOOFDSTUK 5

Semantiek van de propositielogica 1

1. Waarheidstafels

Die Wahrheitsmöglichkeiten der Elementarsätze sind die Bedingungen der Wahrheit und Falschheit der Sätze.

Ludwig Wittgenstein, Tractatus Logico Philosophicus, 4.41, [**Wit61**]

We hebben nu de beschikking over atomen en voegtekens en kunnen hiermee samengestelde proposities maken. In deze paragraaf zullen we een begin maken met een methode om de waarheidswaarden van samengestelde proposities te bepalen. De echte 'ins and outs' zullen in Hoofdstuk 7 aan bod komen.

Voor alle duidelijkheid: als we in de logica willen bepalen of de uitspraak 'Jantje zag alweer pruimen hangen en de wereld is plat' waar of onwaar is, dan is het niet de bedoeling dat we écht gaan uitzoeken of Jantje alweer pruimen zag hangen en of de wereld plat is. De logica heeft een bescheidener taak, namelijk om uit te zoeken of de hele uitspraak 'Jantje zag alweer pruimen hangen en de wereld is plat' waar of onwaar is aangenomen dat de uitspraken 'Jantje ...' en 'de wereld ...' waar of onwaar zijn. We willen met andere woorden de waarheidswaarde van samengestelde proposities bepalen aan de hand van de waarheidswaarden van hun samenstellende delen.

In Paragraaf 3.2 hebben we het over waarheidsdefiniete voegtekens gehad. We kunnen nu opmerken dat de hierboven voor de propositielogica geïntroduceerde voegtekens tot deze klasse waarheidsdefiniete voegtekens behoren —dat moet ook wel, want de logica wil immers de waarheidswaarden van samengestelde uitspraken (formules) bepalen aan de hand van hun samenstellende delen en we hebben al gezien dat dat alleen maar kan als de voegtekens in zo'n samengestelde uitspraak waarheidsdefiniet zijn. Het moet dus mogelijk zijn om de waarheidswaarde van een formule $A \wedge B$ te bepalen als bekend is wat de waarheidswaarden van A en B zijn. We doen dit met behulp van waarheidstafels. Hieronder volgt de eenvoudigste waarheidstafel, n.l. die voor de $\neg$ (en blijf bedenken dat A, B, ... metavariabelen zijn en dus voor willekeurig complexe uitdrukkingen kunnen staan). waarheidstafel

Waarheidstafel voor de $\neg$ waarheidstafel voor $\neg$

A	$\neg A$
0	1
1	0

Deze waarheidstafel laat zien hoe de waarheidswaarde van $\neg A$ afhangt van die van A: als A de waarheidswaarde 0 heeft, heeft $\neg A$ de waarheidswaarde 1 en andersom. (Als 'het regent' waar is, is 'het regent niet' onwaar en andersom.)

waarheidstafel voor $\wedge$

Wanneer moet $A \wedge B$ waar zijn? Uiteraard als zowel A als B waar zijn. Dat wordt ook weergegeven door de waarheidstafel voor de $\wedge$:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Deze waarheidstafel voor de $\wedge$ laat zien dat $A \wedge B$ alleen waar is als zowel A als B waar zijn. In alle andere gevallen is $A \wedge B$ onwaar. 'Ik eet zuurkool en ik eet worst' is alleen waar als ik zowel zuurkool als worst eet.

Soms wordt de waarheidstafel voor de $\wedge$ in een wat andere stijl gegeven. Dan ziet hij er zo uit.

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

inclusieve-of
exclusieve-of

Wanneer moet $A \vee B$ waar zijn? In ieder geval als hetzij A, hetzij B waar is. In de propositielogica is echter $A \vee B$ ook waar als zowel A als B waar zijn (dus als $A \wedge B$ waar is). Waarom is dat zo? De gedachte is als volgt: $A \vee B$ is waar als minstens één van de twee waar is —maar dus ook als ze beide waar zijn. Weliswaar kun je in het laatste geval ook iets sterkers beweren, namelijk dat 'A en B' waar is —maar het feit dat iets sterkers ook waar is, maakt het zwakkere 'A of B' toch niet onwaar? Deze opvatting van de 'of' heet de inclusieve-of. Er bestaat ook zoiets als een exclusieve-of, die alleen waar is als één van beide componenten waar is, maar niet beide tegelijk. We kunnen nu al zien dat we zo'n exclusief-of met de ons ter beschikking staande voegtekens kunnen definiëren : uit het bovenstaande kunnen we concluderen dat A excl-of B equivalent is met A incl-of B en niet (A en B). De exclusieve-of wordt dus equivalent met $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$. Maar dan nu ... de waarheidstafel voor de (inclusieve) $\vee$:

waarheidstafel voor $\vee$

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$A \vee B$ is alleen waar als tenminste één van de twee waar is. 'Ik eet zuurkool of ik eet worst' is alleen onwaar als ik noch zuurkool, noch worst eet. Hier is nog de waarheidstafel in andere stijl.

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

De volgende waarheidstafel is die voor de $\rightarrow$. Dit is de moeilijkste en ieder jaar zijn er weer mensen die zeggen dat hij niet klopt. Voor we deze discussie aangaan laten we hem (haar?) eerst maar zien —dan weten we straks tenminste waar we het over hebben.

waarheidstafel van $\rightarrow$

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

De waarheidstafel voor de $\rightarrow$ zegt dat $A \rightarrow B$ alleen onwaar is als A waar is terwijl B onwaar is. In alle andere gevallen is $A \rightarrow B$ waar.

De oorzaak van het meningsverschil over de al dan niet correctheid van deze waarheidstafel is gelegen in de verschillende mogelijke opvattingen over de aard van de implicatie. Veel mensen vinden dat $A \rightarrow B$ wil zeggen dat er een *causaal* verband tussen A en B is, zoals in 'als ik de schakelaar indruk gaat het licht aan'. Ervan uitgaand dat dit een werkelijk causale 'als...dan' is, is deze uitspraak alleen maar waar als het indrukken van de schakelaar ook werkelijk de oorzaak van het aangaan van het licht is. Als het licht opeens spontaan aanging zou daarmee de uitspraak misschien niet onwaar zijn, maar zeker ook niet waar. Dus als A onwaar is en B waar zou er iets mis gaan —en dat in tegenstelling tot onze waarheidstafel die heel simpel stelt dat $A \rightarrow B$ in zo'n geval gewoon waar is.

causaal verband

Er bestaan echter ook niet-causale implicaties. Beschouw bijvoorbeeld de uitspraak 'als ik een goed humeur heb neem ik een doos bonbons mee'. Niemand zal willen beweren dat mijn humeur op dezelfde manier een doos bonbons veroorzaakt als de ingedrukte schakelaar het licht doet branden. De implicatie moet nu op deze laatste manier worden opgevat —als een soort belofte. Het verbreken van de belofte komt dan overeen met de onwaarheid van de implicatie; het niet-verbreken ervan met de waarheid van de implicatie (merk op dat dit een negatieve definitie is: de betekenis van de implicatie wordt bepaald door het ene geval waarin hij zeker onwaar is —de overige gevallen zijn 'by default' waar). Het is met de implicatie als in het volgende sprookje.

Er was eens een land dat Darfikollig heette. Darfikollig werd geteisterd door een monsterachtige draak. Het beest vrat al jaren alle oogsten (en af en toe een inwoner) op, zodat er een ernstig voedseltekort dreigde. De Darfikolligers waren de wanhoop nabij want alle dappere drakendoders uit de wijde omgeving hadden reeds tevergeefs geprobeerd het beest te doden en de meesten waren daarbij zelf op jammerlijke wijze aan hun eind gekomen of tenminste blijvend invalide geworden. Ten einde raad besloot de regerend vorst overal in het koninkrijk plakaten op te laten hangen met de volgende mededeling:

Nu zijn er vier mogelijke scenario's voor het vervolg van dit gruwelijke verhaal:

Scenario 1: Op zekere dag trekt een moedige smid, gewapend met een zware voorhamer, er op uit om de draak te doden. Na een zware strijd ligt het monster morsdood in een plas van z'n eigen stinkende drakenbloed en de smid trekt vermoeid, maar overigens niet gewond naar het koninklijk paleis waar de dolblije koningin haar onmiddellijk in de echt laat verbinden met haar oudste zoon.

Scenario 2: Net toen het wanhopige, hongerige volk begon te morren en er geruchten van opstand en rebellie de ronde begonnen te doen, besloot de draak Darfikollig te verlaten omdat er niet genoeg meer te halen viel. Hij verhuisde naar het gevreesde en gehate buurland Prolkwtszt en maakte de Prolkwtszters nog jarenlang het leven zuur. Darfikollig vierde uitbundig feest (hoewel er niet zoveel te eten was —gelukkig had de draak niet van bier gehouden) en de koningin besloot uit pure vreugde haar oudste zoon uit te huwelijken aan de knappe dochter van de hoflogica.

Scenario 3: Geruime tijd nadat de plakaten zijn opgehangen heeft nog niemand kans gezien de draak te doden. Het wachten beu en verlangend grootmoeder te worden, besluit de koningin haar helaas niet zo knappe oudste zoon uit te huwelijken aan de helaas ook niet zo knappe koningsdochter van het bevriende buurland Prolkwtszt (dat leverde helaas voor de koningin ook niet zulke knappe kleinkinderen op). De draak, die er toch al zo'n 3000 jaar op had zitten (en dat is zelfs voor een draak een respectabele leeftijd!) sterft enige tijd later van ouderdom en het land haalt alsnog opgelucht adem.

Scenario 4: Een stoere barbier gaat met een scheermes de draak te lijf, overwint het monster en vervoegt zich bij de koningin. Ze vraagt de hand van de kroonprins, maar wordt botweg de voordeur van het paleis uitgeschopt —de koningin heeft namelijk een hekel aan barbiers, omdat ze ooit in haar vroegste jeugd... Maar dát is een ander verhaal, dat een andere keer verteld moet worden.

Het is duidelijk dat in scenario 1 de koningin zich keurig aan haar belofte heeft gehouden, maar hoe zit dat met scenario 2? Aangezien de draak verhuisde is de belofte niet meer van toepassing en deze is dan ook zeker niet verbroken. Het huwelijk tussen kroonprins en dochter van de hoflogica kan dan ook plaatsvinden zonder dat er koninklijke beloften of logische wetten worden geschonden. Ook in scenario 3 wordt de belofte niet verbroken, want de koningin had immers alleen beloofd haar eerstgeborene uit te huwelijken in het geval er een drakendoder op de stoep zou staan. Daarmee is nog niets gezegd over de situatie dat zich géén drakendoder aandient. Alleen in scenario 4 houdt de koningin zich niet aan haar belofte. Dit laatste scenario komt precies overeen met het ene geval waarin onze implicatie onwaar is.

In de loop der tijd zijn diverse alternatieven aangedragen voor de interpretatie van de pijl, die we wellicht te zijner tijd zullen beschouwen. We zullen ons echter voorlopig beperken tot de hier gepresenteerde materiële implicatie. De hier gegeven waarheidstafel heeft enige merkwaardige gevolgen: (i) Als het antecedent van de implicatie onwaar is, is de hele implicatie waar. (ii) Als het consequent van de implicatie waar is, is de hele implicatie óók waar.

materiële implicatie

Bewering (i) parafraseert het ex falso principe:

Ex falso sequitur quodlibet

oftewel: uit het onware volgt alles. Een voorbeeld van een op grond van bewering (i) ware propositie is: ‘als de maan van groene kaas is, dan ben ik koning van de U.S.A.’ Uit bewering (ii) volgt de waarheid van ‘als het lekker weer is dan geldt dat $1 + 1 = 2$’.

Hier is nog de waarheidstafel van implicatie in de alternatieve stijl.

$\to$	0	1
0	1	1
1	0	1

Merk op dat het eerste argument in deze tafel hoort bij de meest linkse kolom en het tweede argument bij de bovenste rij.

Tot slot rest ons nog de bi-implicatie (dubbele pijl). Het ligt voor de hand dat de formule $A \leftrightarrow B$ waar is, als A en B dezelfde waarheidswaarde hebben. Hieruit volgt onmiddellijk de volgende waarheidstafel:

bi-implicatie

waarheidstafel van $\leftrightarrow$

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2. Waarheidstafels en complexere formules

Nu we de waarheidswaarde kunnen bepalen van een propositie die bestaat uit twee formules en een voegteken, kunnen we ook de waarheidswaarde van willekeurig ingewikkelde formules bepalen, vooropgesteld dat de waarheidswaarden van de atomen bekend zijn. We weten immers dat onze voegtekens waarheidsdefiniet zijn en dat dus de waarheidswaarde van een complexere propositie bepaald wordt door de principe van composi-tionaliteit

waarheidswaarden van de subformules (NB. dit wordt het 'principe van compositionaliteit' genoemd). Voor deze samenstellende delen geldt echter weer hetzelfde en voor hun samenstellende delen... net zo lang tot we bij de atomen zijn aangeland.

Hier is een voorbeeld. Stel dat gegeven is dat de waarheidswaarde van p gelijk aan 1 is en die van q gelijk aan 0. We moeten uitzoeken wat de waarheidswaarde van $\neg(p \to q) \wedge p$ is. Die hangt af van de waarheidswaarden van $\neg(p \to q)$ en die van p. Als beide onderdelen waar zijn zegt de waarheidstafel voor de $\wedge$ ons dat ook de hele propositie waar is. Het tweede onderdeel, p, is waar (dat is gegeven), dus dat zit wel goed. Nu moeten we nog kijken of het eerste onderdeel, $\neg(p \to q)$, ook waar is. $\neg(p \to q)$ is waar als $p \to q$ onwaar is (volgens de waarheidstafel voor de $\neg$). De formule $p \to q$ is volgens de waarheidstafel voor de $\to$ onwaar als p waar is en q onwaar. En dat is precies het geval! Dus als p waar is en q onwaar, dan is $\neg(p \to q) \wedge p$ waar.

Het zou prettig werken als we het bovenstaande enigszins systematisch zouden kunnen aanpakken. Dit doen we weer met waarheidstafels, echter nu met een soort gegeneraliseerde versie van de waarheidstafels die we in de vorige paragraaf zagen. We beginnen met het naast elkaar zetten van de in de formule voorkomende atomen. Daarnaast komen alle onderdelen waaruit de formule bestaat en tenslotte de hele formule. Onder al deze subformules kunnen we nu systematisch alle waarheidswaarden invullen, globaal van links naar rechts werkend, tot we aan het eind een rijtje waarheidswaarden voor de hele formule krijgen. Laten we maar eens naar een praktisch voorbeeld kijken (dit soort abstract gepraat verduidelijkt ook niet veel).

We nemen de formule $p \to (p \leftrightarrow q)$. Deze formule bevat twee atomen: p en q, en één niet-atomaire 'echte' subformule: $p \leftrightarrow q$. De waarheidstafel gaat er dan als volgt uit zien:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to (p \leftrightarrow q)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

De kolom van $p \leftrightarrow q$ ontstaat uit die van p en die van q met behulp van de waarheidstafel voor de $\leftrightarrow$. Die van $p \to (p \leftrightarrow q)$ ontstaat uit de kolommen van p en $p \leftrightarrow q$ met behulp van de waarheidstafel voor de $\to$. Laten we eens naar deze laatste kolom kijken. Op de eerste rij staat onder de p een 0 en onder $p \leftrightarrow q$ een 1. De waarheidstafel voor de $\to$ zegt ons dat een 0 voor de pijl en een 1 erachter weer een 1 oplevert, dus dat vullen we in op de eerste rij onder $p \to (p \leftrightarrow q)$. Op de tweede rij zien we dat links en rechts van de pijl een 0 staat en alweer met de waarheidstafel voor de pijl ontdekken we dat de hele implicatie dan waar is, dus ook op de tweede regel komt een 1 te staan. De laatste twee regels worden net zo behandeld. Ga na dat ze correct zijn. We hebben nu dus een tabel gemaakt die ons vertelt hoe de waarheidswaarde van $p \to (p \leftrightarrow q)$ afhangt van de waarheidswaarden van p en q.

Nog een voorbeeld (ga zelf na hoe we aan de diverse kolommen komen):

p	q	$\neg q$	$(p \vee q)$	$p \to \neg q$	$(p \vee q) \to (p \to \neg q)$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0

Uiteraard kan een propositie ook meer dan twee verschillende atomen bevatten. Een propositie die twee verschillende atomen bevat heeft vier mogelijke 'toestanden' — de waarheidstafel heeft vier regels, omdat er vier verschillende manieren zijn waarop we de twee atomen waar respectievelijk onwaar kunnen maken. De waarheidstafel voor een propositie die drie atomen bevat zal om deze reden acht regels hebben (en eentje met vier atomen 16 regels, etc.; in het algemeen heeft een waarheidstafel voor een propositie die n atomen bevat 2^n regels.).

Hieronder nog een voorbeeld van een waarheidstafel voor een propositie met drie atomen:

p	q	r	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$p \vee r$	$(q \wedge \neg r) \leftrightarrow (p \vee r)$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0

Bij het opschrijven van een waarheidstafel is het uiteraard wel zaak dat je alle 'toestanden' gehad hebt (8 stuks dus in bovenstaand voorbeeld). Veel mensen schijnen het problematisch te vinden om systematisch alle mogelijke combinaties van enen en nullen op te schrijven. Wie binair kan tellen zal dit niet moeilijk vinden, maar voor wie het wel lastig vindt: kijk naar de eerste drie kolommen van bovenstaande waarheidstafel (dat zijn immers de kolommen waar het om gaat). Als je telkens een stel van drie nullen en enen op een rij als een getal leest, dan staan hier van boven naar onder de getallen (00)0, (00)1, (0)10, (0)11, 100, 101, 110, 111. Dit is precies een oplopende reeks die bestaat uit alle getallen met niet meer dan drie cijfers waarin alleen maar nullen en enen voorkomen —dus gewoon de reeks 0, 1, 2, 3, 4, ..., waarbij je alles weglaat waarin iets anders dan enen en nullen voorkomen (en nu wil ik het nooit meer iemand fout zien doen).

Voor d'oefeningh nog een paar waarheidstafels:

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$\neg q \wedge p$	$p \rightarrow \neg r$	$(\neg q \wedge p) \vee (p \rightarrow \neg r)$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$q \rightarrow \neg p$	$p \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$	$(p \rightarrow (q \rightarrow \neg p)) \wedge (p \rightarrow \neg q)$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0

De hier beschreven manier om waarheidstafels te noteren is de meest ‘zekere’: als je een minimum aan zorgvuldigheid in acht neemt is de kans op fouten erg klein. Een nadeel is dat alle subformules opgeschreven moeten worden —zeker bij grote formules wil een bijbehorende waarheidstafel nogal snel van het papier aflopen. We weten dat bij ieder voegteken in een formule precies die subformule gevonden kan worden waar dat voegteken het hoofdvoegteken van is en andersom. Er is dus een één-op-één correspondentie tussen voegtekens en subformules. We kunnen nu in een waarheidstafel de subformules weglaten (behalve de atomen) en alleen de hele formule opschrijven. We schrijven dan onder ieder voegteken de bij de corresponderende subformule horende kolom enen en nullen. Deze methode werkt sneller en scheelt schrijfwerk —maar de kans op fouten is evenredig groter. Niet doen dus als je niet erg zeker van je zaak bent. Hieronder ter illustratie van deze methode. . .

p	q	$p \rightarrow (q \vee \neg p)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Fase 1: $\neg p$ . . .

p	q	$p \to$	$(q \vee$	$\neg p)$
0	0		1	1
0	1		1	1
1	0		0	0
1	1		1	0

en fase 2: $\neg p$ en $q \vee \neg p$ ...

p	q	$p \to$	$(q \vee$	$\neg p)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	0

... en klaar.

... en de hoogste tijd voor iets anders.

3. Samenvatting

Waarheidstafels:

Een waarheidstafel voor een samengestelde formule bevat een kolom voor ieder atoom en voor iedere subformule. Iedere kolom bevat de waarheidswaarden voor de corresponderende subformule.

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4. Opgaven

1. Maak waarheidstafels voor de volgende formules.
   i. $(p \to q) \to q$
   ii. $(p \vee \neg q) \to p$
   iii. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
   iv. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to r)$
   v. $((p \to q) \to r) \to (p \to (q \to r))$
   vi. $p \to (\neg p \to (p \to (\neg p \to (p \to (\neg p \to p)))))$

vii. $((((p \leftrightarrow p) \leftrightarrow p) \leftrightarrow p) \leftrightarrow p) \leftrightarrow p$

viii. $((p \to q) \vee (p \to r)) \leftrightarrow ((\neg q \to \neg p) \vee (\neg r \to \neg p))$

ix. $\neg p \wedge (q \to (r \vee p))$

x. $((p \to q) \vee (q \to \neg p)) \wedge (r \wedge (p \vee \neg p))$

2. Gegeven: p, q en r zijn waar, s, t en u zijn onwaar. Bereken de waarheidswaarde van de volgende proposities.

   i. $p \leftrightarrow (\neg t \vee r)$

   ii. $((r \wedge \neg t) \leftrightarrow (q \to p)) \vee s$

   iii. $(\neg\neg u \vee \bot) \vee \neg(\neg t \to u)$

   iv. $(((t \leftrightarrow s) \leftrightarrow \neg u) \leftrightarrow p) \leftrightarrow t$

   v. $(s \wedge r) \to ((u \vee \neg p) \wedge \neg(t \to \neg\neg q))$

3. i. Gegeven: $p \wedge (q \wedge r)$ is waar. Wat zijn de waarheidswaarden van p, q en r?

   ii. Gegeven: $(p \wedge q) \to r$ is onwaar. Wat weet je van de waarheidswaarde van q?

   iii. Gegeven: $p \to \neg p$ is waar. Is p waar of onwaar?

   iv. Gegeven: $p \to (q \to r)$ is onwaar. Bepaal de waarheidswaarden van de atomen p, q en r.

   v. Wat weet je van de waarheidswaarde van de volgende formule?

$$(p \to q) \vee (\neg p \to q)$$

   vi. Wat weet je van de waarheidswaarde van de volgende formule, als gegeven is dat p waar is?

$$(p \to q) \wedge (p \to \neg q)$$

   vii. Wat weet je van de waarheidswaarde van $p \leftrightarrow q$, als gegeven is dat $p \leftrightarrow \neg q$ waar is?

4. * Zij gegeven dat een even aantal van de atomen $p_1, \ldots, p_{100}$ waar is. Wat is de waarheidswaarde van de volgende formule?

$$(p_1 \leftrightarrow (p_2 \leftrightarrow (\ldots (p_{99} \leftrightarrow p_{100}) \ldots)$$

HOOFDSTUK 6

Vertaling

Na alle kretologie van het vorige hoofdstuk doen we het even rustiger aan (?). In dit hoofdstuk gaan we ons bezig houden met het vertalen van 'gewone' talige uitspraken naar de taal van de propositielogica en andersom. Als we van het Nederlands naar het Engels willen vertalen hebben we een dik woordenboek nodig. Het voordeel van logica is dat, als we Nederlands naar Logieks willen vertalen, we eigenlijk niets meer nodig hebben dan de definitie van onze logische syntax: ongeveer vijf regels tekst! (Laat Van Dale dat maar eens nadoen.)

Willen we een talige uitspraak omzetten in een propositielogische formule, dan moeten er verscheidene dingen gebeuren:

- ten eerste moet worden bepaald hoe de voegtekens in de zin corresponderen met de logische voegtekens;
- ten tweede moeten atomaire proposities in de uitspraak worden omgezet in atomen uit de logische taal;
- tot slot moet de logische structuur van de zin vertaald worden in de taal van de propositielogica.

De eerste stap hoeven we maar één keer te doen (dat gebeurt straks ook): als we één keer voor alle talige voegtekens hebben vastgelegd hoe we ze vertalen naar de logica, dan kunnen we daar telkens weer op teruggrijpen. De tweede stap moeten we (uiteraard) telkens weer opnieuw doen en bestaat uit het maken van een vertaalsleutel. Stap 3 is het eigenlijke werk. Maar eerst stap 1.

Opmerking 0.1. * De ontwerpers van de moderne logica, zoals Gottlob Frege in zijn Begriffsschrift van 1879 ([**Fre98**]), hadden niet in eerste instantie de bedoeling dat de logica geschikt zou zijn om natuurlijke taal te parafraseren. De logica moest juist de gewone taal in een aantal opzichten verbeteren. Ze hadden dus eerder een ingenieurs oogmerk dan een AI oogmerk.

Het idee dat logica gebruikt kon worden om natuurlijke taal te analyseren komt van Richard Montague in o.a zijn artikel "Universal Grammar" van 1970 ([**Mon70**]). Montague gebruikt wel een vorm van logica die een stuk complexer is dan propositielogica (hogere orde typentheorie)! Montague's benadering leidde tot de *Montague grammar*. Deze werd later opgevolgd door o.a. *categorial grammar*.

Montague grammar
categorial grammar

Langs een andere lijn hebben logici geprobeerd een realistischer semantiek te geven van implicatie. Zie de artikelen over *conditionals* in de Stanford Encyclopedia of Philosophy:
`http://plato.stanford.edu/archives/sum2010/contents.html`. ❑

conditionals

1. De vertaling van de voegtekens

Een korte beschouwing van een aantal voorbeelden laat zien dat voegtekens in de taal op niet altijd even duidelijke (lees: logische) wijze gebruikt worden.

Eno luistert naar Zappa en Fripp luistert naar Wyatt.

De 'en' in deze zin is de normale conjunctie die zegt dat twee proposities beiden 'het geval zijn' (en als je niet weet wie Eno, Zappa, Fripp en Wyatt zijn, dan zou ik daar maar eens wat aan doen). Je kunt de twee onderdelen ook omdraaien zonder dat dat problemen oplevert. Anders is dat met:

Pärt bond zijn schaatsen onder en reed met lange slagen weg.

In deze zin kun je de volgorde niet omdraaien: de 'en' heeft een duidelijk element van volgorde, een tijdscomponent. Onze logica kan deze 'en' niet weergeven — probeer maar eens een waarheidstafel te maken. Onze logica is dus 'tijdsvrij' (wat iets anders is dan tijdloos —Pärt is tijdloos en als je niet weet wie Pärt is . . .)

Jan en Marie gaan trouwen.

De 'en' staat tussen twee eigennamen. Als we willen dat 'en' hier de rol van propositie-voegteken speelt, dan zullen we de zin moeten herformuleren. De zin kan echter op twee manieren gelezen worden:

i. Jan en Marie gaan met elkaar trouwen

ii. Jan gaat trouwen (met Beppie) en Marie gaat trouwen (met Henkie).

Beide lezingen zijn even legitiem. Welke je kiest, hangt van de context af (of van je voorkeur). Als we voor lezing (i) kiezen, speelt de 'en' dus geen logische rol —hij verbindt namelijk niet twee proposities. We kunnen dan niet anders dan de hele zin als atomaire propositie opvatten. Bij lezing (ii) fungeert de 'en' wel als logische conjunctie en bestaat de zin dus uit twee atomaire proposities.

Het zal duidelijk zijn dat we door zinnen te herformuleren soms de oorspronkelijke betekenis geweld aandoen. Voorlopig zullen we dat maar voor lief nemen en dat alles onder het motto 'beter een gekneusde banaan dan helemaal geen banaan'. Wie nu begint te protesteren kan ik maar één raad geven: zorg dat je je zinnen zo formuleert dat dit probleem niet optreedt (als Kant dat had gedaan dan had hij een stuk minder (en leesbaarder) geschreven —hoor ik iemand iets over taalverarming mompelen? Dit is LOGICA hoor, geen taalkunde!).

We zullen nu de logische voegtekens aflopen en bekijken in wat voor variaties ze in de taal voorkomen. Tegelijkertijd zullen we bij ieder voegteken een semi-formeel vertaalschema geven.

1.1. Niet. Onze taal kent niet veel variaties op 'niet'. Negaties komen vooral voor als voorvoegsels zoals 'on', 'non-', etc. Al deze voorvoegsels kunnen op dezelfde manier geanalyseerd worden:

1.1.1. *Non.* 'Hij is een non-conformist.'

Herformulering: Hij is een niet-conformist. Of: Het is niet zo dat hij een conformist is.

- %%% non-## $\approx$ $\neg$ %%% ##

Hier betekent '$\approx$' 'heeft ongeveer dezelfde betekenis als'. $\approx$

1.1.2. *On-.* 'Hij is ongevoelig voor goede argumenten.'

Herformulering: Hij is niet gevoelig voor goede argumenten. Of: Het is niet zo dat hij gevoelig is voor goede argumenten.

- %%% on-## $\approx$ $\neg$%%%##

1.2. En. Er zijn een aantal voegtekens die, met verwaarlozing van bepaalde betekenisnuances, als logische conjunctie kunnen worden gelezen.

1.2.1. *Hoewel.* 'Hoewel het tentamen makkelijk was haalden de meesten een laag cijfer.'

Herformulering: Het tentamen was makkelijk en de meesten haalden een laag cijfer.

- A hoewel B $\approx$ $A \wedge B$

1.2.2. *Maar.* 'De maaltijd is eenvoudig maar voedzaam.' (met dank aan Marten Toonder)

Herformulering: De maaltijd is eenvoudig en de maaltijd is voedzaam.

- A maar B $\approx$ $A \wedge B$

1.2.3. *Noch.* 'Het is warm noch koud.'

Herformulering: Het is niet warm en het is niet koud.

Merk op dat hier twee negaties worden ingevoerd.

- A noch $B \approx \neg A \wedge \neg B$

1.2.4. *Zowel... als.* 'Zowel de maaltijd als de wijn was lekker.'

Herformulering: De maaltijd was lekker en de wijn was lekker.

- Zowel A als B $\approx$ $A \wedge B$

1.3. Of. De 'of' in het spraakgebruik heeft vaak de exclusieve betekenis, maar ook de inclusieve komt wel voor:

In deze winkel kun je een CD van Hassell of Surman kopen.

Waarschijnlijk kun je in die winkel zelfs wel een CD van Hassell én een CD van Surman kopen. Je zult er echter geen CD van Hassell en Surman kunnen kopen (die bestaat namelijk niet —en als je niet weet ...). De context maakt echter soms duidelijk dat het om een exclusieve-of gaat:

Vanavond eten we zuurkool of boerenkool.

Het is toch wel wat onwaarschijnlijk dat er vanavond zuurkool én boerenkool zou worden gegeten? De exclusieve-of wordt ook wel vaak aangegeven door of ..., of ...

Ik draai nu óf een CD van Hassell, óf een CD van Surman (maar ik draai ze dus niet allebei tegelijk).

- $$\begin{aligned} \text{Of } A\text{, of } B \;&\approx\; (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B) \\ \mathsf{Eq} \;& A \leftrightarrow \neg B \\ \mathsf{Eq} \;& \neg A \leftrightarrow B \\ \mathsf{Eq} \;& \neg(A \leftrightarrow B) \end{aligned}$$

Eq

Hier betekent Eq ‘logisch equivalent’. Zie Paragraaf 7.3.4.

1.4. Als. . . dan. De in de taal voorkomende variaties op ‘als. . . dan’ (de implicatie) zijn wat subtieler dan de variaties op de conjunctie.

1.5. Slechts als/alleen als. ‘Slechts als u lid bent, krijgt u korting.’

Dit betekent niet (zoals je misschien zou denken) dat je korting krijgt als je lid bent, maar dat je in ieder geval lid moet zijn om korting te krijgen. Dus als je iemand tegenkomt die korting krijgt dan weet je zeker dat zij lid is. De herformulering van deze zin wordt dus:

Herformulering: Als u korting krijgt, dan bent u lid.

Merk op dat het gedeelte achter ‘slechts als’ nou net niet achter de ‘als’ komt te staan. Wie niet gelooft in de correctheid van deze herformulering moet de volgende zin eens beschouwen:

‘Slechts als je een verkeersovertreding begaat, krijg je een boete.’

Dit wil niet zeggen dat je ook daadwerkelijk een boete krijgt bij zo'n overtreding —misschien was er toevallig geen agent of camera in de buurt. Het wil echter wel zeggen dat als je een boete krijgt, je dan blijkbaar ook een verkeersovertreding hebt begaan (waarbij we uiteraard andere delicten even negeren).

- Slechts als A dan $B \;\approx\; B \to A$
- A slechts dan als $B \;\approx\; A \to B$

1.5.1. *Mits.* ‘U bent welkom mits u een stropdas draagt.’

Herformulering: Als u een stropdas draagt, dan bent u welkom (is toch niet al te problematisch?).

- A mits $B \;\approx\; B \to A$

1.5.2. *Impliceert.* ‘Dat de conducteur op z'n fluitje blaast, impliceert dat de trein gaat vertrekken.’

Herformulering: Als de conducteur op z'n fluitje blaast, gaat de trein vertrekken.

Dit gebruik van ‘impliceert’ is een beetje vergezocht. Meestal zal het voorkomen in een zin als ‘Wat je nu zegt impliceert dat je niet hebt begrepen wat ik je net vertelde’. Dergelijke zinnen zijn niet propositielogisch analyseerbaar —we kunnen er niet zoiets van maken: ‘als wat je nu zegt dan heb je niet begrepen wat ik je net heb verteld’.

- A impliceert $B \;\approx\; A \to B$

1.6. Bi-implicatie. Natuurlijk bestaat er niet zoiets als het voegwoord 'bi-impliceert'. We kunnen ons echter wel uitspraken voorstellen als 'warm weer staat gelijk aan drukke snelwegen richting Zandvoort'. Er zijn een paar voegwoorden die bi-implicatie uitdrukken:

Dan en slechts dan (als)

'Een uitspraak geldt a priori dan en slechts dan als hij onafhankelijk van onze ervaring geldt.'

Dit zegt hetzelfde als: "'een uitspraak geldt a priori" staat gelijk aan "hij geldt onafhankelijk van onze ervaring"'.

Dit voegwoord is een beetje gekunsteld en wordt (daarom?) voornamelijk in wetenschappelijke context gebruikt —en dan vaak afgekort tot 'desda'. In het Engels gebruikt men 'if and only if', afgekort tot *iff.*

- A desda $B \;\approx\; A \leftrightarrow B$

1.6.1. *Noodzakelijk en voldoende voorwaarde.* Vaak wordt in wetenschappelijke kringen ook wel de zegswijze 'noodzakelijk en voldoende voorwaarde' gebruikt.

'Lekker weer is een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor druk strandtoerisme.'

Zodra het lekker weer is, gaat half Nederland naar het strand. Dus het hoeft alleen maar lekker weer te zijn..., dus het lekkere weer is een voldoende voorwaarde voor druk strandtoerisme. Oftewel: als het lekker weer is, dan...

Maar ook: als het druk is aan het strand, dan weet je ook zeker dat het lekker weer is. Mensen gaan namelijk anders niet naar het strand. Het is dus nodig dat het lekker weer is. Lekker weer is een noodzakelijke voorwaarde voor druk strandtoerisme. Of: Als het druk is aan het strand dan is het lekker weer.

Op een rijtje:

- A is een voldoende voorwaarde voor $B \;\approx\; A \to B$

- A is een noodzakelijke voorwaarde voor $B \;\approx\; B \to A$

- A is een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor $B \;\approx\; (A \to B) \wedge (B \to A)$. Dit is equivalent met $A \leftrightarrow B$ (nu weet je meteen waarom de dubbele pijl een dubbele pijl is).

1.6.2. *Tenzij.* 'Je mag doorrijden tenzij het licht op rood staat'

Dit betekent dat als het licht wel op rood staat je niet mag doorrijden en als het licht niet op rood staat je wel mag doorrijden. Dit houdt in dat de twee delen tegengestelde waarheidswaarden hebben. Dus het eerste deel bi-impliceert de negatie van het tweede deel (of andersom):

$$\begin{aligned} A \text{ tenzij } B \quad &\approx \quad A \leftrightarrow \neg B \\ \bullet \qquad\qquad &\text{Eq} \;\; \neg A \leftrightarrow B \\ &\text{Eq} \;\; \neg(A \leftrightarrow B). \end{aligned}$$

Uiteraard is het helemaal niet de bedoeling van het voegwoord ‘tenzij’ om bi-implicatie uit te drukken. Het is gewoon ‘toeval’ dat je het het beste op deze manier kunt vertalen. In het leven van alledag wordt met een uitspraak als bovenstaande in eerste instantie natuurlijk bedoeld dat je niet mag doorrijden als het licht op rood staat.

1.7. Niet-waarheidsfunctionele voegtekens. Naast de voorgaande waarheidsfunctionele of waarheidsdefiniete voegtekens beschikt onze taal ook nog over een arsenaal niet-waarheidsfunctionele voegtekens. Deze voegtekens kunnen niet naar de propositielogica vertaald worden en zinnen waarin ze voorkomen vallen dan ook buiten het bereik van onze analyse. Enige voorbeelden:

1.7.1. *Omdat.* ‘Jan krijgt de eerste prijs omdat hij gewonnen heeft.’

Het voegwoord ‘omdat’ heeft een causaal karakter waardoor het niet te vertalen is. Een vertaling als ‘Jan krijgt de eerste prijs en Jan heeft gewonnen’ miskent het oorzakelijk verband tussen de twee delen. Een zin als ‘als Jan gewonnen heeft, krijgt hij de eerste prijs’ geeft wel een deel van de betekenis weer, maar niet de gehele. Deze zin zegt namelijk niet dat Jan gewonnen heeft, terwijl onze oorspronkelijke zin dat wel zegt.

1.7.2. *Dus.* ‘Jan koopt de scheidsrechter om, dus krijgt hij de eerste prijs.’

Voor ‘dus’ geldt hetzelfde als voor ‘omdat’.

1.7.3. *Want.* ‘Jan wint de eerste prijs, want hij heeft de scheidsrechter omgekocht.’

Idem dito meer van hetzelfde.

De geachte lezer zal ongetwijfeld meer voorbeelden van niet-waarheidsfunctionele voegtekens kunnen vinden. Het ging er slechts om u lieden op het verschijnsel opmerkzaam te maken.

2. De vertaalsleutel

We kunnen nu voegtekens vertalen. De laatste voorbereidende stap voordat we ons met de vertaling van complexe proposities kunnen gaan bezig houden, behelst de vertaling van atomaire proposities. Eigenlijk valt daar weinig over te vertellen. We weten al dat propositievariabelen staan voor talige atomaire proposities. Het enige dat we hoeven te doen is af te spreken welke variabele voor welke propositie staat. Hiermee is dan de vertaling van atomaire proposities naar de propositielogica verzorgd. We spreken in dit geval dan ook van een vertaalsleutel. Laten we gewoon een paar voorbeelden bekijken.

Stel dat we de volgende zin zouden willen vertalen:

Hoewel het al laat is, heb ik wel zin om naar de film of het café te gaan.

We moeten dan eerst weten welke voegtekens en welke atomaire proposities een rol spelen. De voegtekens zullen we onmiddellijk herkennen: 'hoewel' en 'of'. Deze voegtekens 'plakken' de atomen aan elkaar. We kunnen dus niet anders dan besluiten dat de volgende atomaire proposities in deze zin voorkomen: 'het is al laat', 'ik heb wel zin om naar de film te gaan' en 'ik heb wel zin om naar het café te gaan'. Een vertaalsleutel voor deze zin zou er dan zo uit kunnen zien:

p = het is al laat

q = ik heb wel zin om naar de film te gaan

r = ik heb wel zin om naar het café te gaan

Merk op dat er wel het een en ander aan herformuleringen moet plaatsvinden voordat we 'fatsoenlijke' proposities hebben. Het is overigens natuurlijk voor de hand liggend dat dit niet de enig mogelijke vertaalsleutel is. De volgende twee zouden even goed zijn:

r = het is al laat

p = ik heb wel zin om naar de film te gaan

q = ik heb wel zin om naar het café te gaan

en

q = het is al laat

r = ik heb wel zin om naar de film te gaan

s = ik heb wel zin om naar het café te gaan

Propositievariabelen zijn slechts variabelen, wat wil zeggen dat ze voor iedere willekeurige atomaire propositie kunnen staan. Nog een voorbeeld:

De echte minima zullen vrijgesteld worden van BTW als het nationaal inkomen niet daalt.

De vertaalsleutel ligt voor de hand:

p = de echte minima zullen vrijgesteld worden van BTW

q = het nationaal inkomen daalt

Let op de vertaling van q: deze is niet 'het nationaal inkomen daalt niet'. De negatie is immers ook een voegteken en kan dus nog uit de propositie gehaald worden. Met een mooie kreet: we streven naar maximale analyse en die wordt pas bereikt als we ophouden met analyseren op het niveau van de echt atomaire proposities. maximale analyse

Een wat lastiger voorbeeld:

De aanwezigheid van staatsgeheimen in de kluis is voldoende opdat de huisknecht medeplichtig zij, alleen als de eerste minister het parlement slechts bezoekt als de president verkiezingen uit zal schrijven.

(Probeer, voor je verder leest, de voegtekens in deze zin te vinden en een vertaalsleutel te maken.) De voegtekens in deze zin zijn achtereenvolgens: 'is voldoende', 'alleen als' en 'slechts als'. De vertaalsleutel ziet er als volgt uit:

p = de staatsgeheimen zijn aanwezig in de kluis

q = de huisknecht is medeplichtig

r = de eerste minister bezoekt het parlement

s = de president zal verkiezingen uitschrijven

Tenslotte:

Zijn verlegenheid is niet onverklaarbaar, tenzij je zijn verleden niet kent of zijn moeder nooit ontmoet hebt.

Vertaalsleutel:

p = zijn verlegenheid is verklaarbaar

q = je kent zijn verleden

r = je hebt zijn moeder (ooit) ontmoet

Merk op dat in alle drie de proposities negaties 'weggeanalyseerd' worden. Wie 'onverklaarbaar' principieel als één woord opvat (en dus niet noodzakelijk als een variant op 'niet verklaarbaar') zou krijgen: $p =$ zijn verlegenheid is onverklaarbaar. Idem wat betreft r: als je het derde atoom niet leest als 'je hebt zijn moeder niet ooit ontmoet' zal als vertaling krijgen: $r =$ je hebt zijn moeder nooit ontmoet.

Genoeg over vertaalsleutels. We hebben nu al het nodige gereedschap in huis om zinnen als in bovenstaande voorbeelden te vertalen.

3. De vertaling

Het maken van een vertaling behelst niets meer dan het opzoeken van de voegtekens, het maken van een vertaalsleutel en het in de goede volgorde achter elkaar zetten van atomen en voegtekens. De beste methode is om in een zin eerst het hoofdvoegteken te zoeken. Dan weet je dat de zin van de vorm '1e deel-voegteken-2e deel' is. Het komt er op neer dat je haakjes gaat zetten in de zin. Nu kun je met het eerste en tweede deel van de zin hetzelfde doen, net zo lang tot je op atomen stuit. Op deze manier bouw je als vanzelf de vertaling op. We gaan de voorbeelden uit de vorige paragraaf eens vertalen.

'Hoewel het al laat is, heb ik wel zin om naar de film of het café te gaan'

Vertaalsleutel:

p = het is al laat

q = ik heb wel zin om naar de film te gaan

r = ik heb wel zin om naar het café te gaan

Vertaling: $(q \vee r) \wedge p$

Het hoofdvoegteken is 'hoewel'. De zin is dus van de vorm 'Hoewel A, B', oftewel 'B hoewel A'. Dit wordt dus vertaald met $B \wedge A$, waarbij $A =$ 'het is al laat' en B = 'ik heb wel zin om naar de film of het café te gaan'. A is al een atoom, namelijk p. We moeten B nog analyseren. Deze is van de vorm $C \vee D$, waarbij we zien dat C en D ook atomen zijn, namelijk q resp. r. De hele vertaling wordt nu dus $(q \vee r) \wedge p$.

'De echte minima zullen vrijgesteld worden van BTW als het nationaal inkomen niet daalt'

Vertaalsleutel: p = de echte minima zullen vrijgesteld worden van BTW

q = het nationaal inkomen daalt

Vertaling: $\neg q \to p$

De zin is van de vorm 'A als B', dus wordt dat 'als B dan A', oftewel $B \to A$. De zin B is van de vorm 'niet C', of $\neg C$. De zinnen A en C zijn atomen, dus de vertaling wordt $\neg q \to p$.

'de aanwezigheid van staatsgeheimen is voldoende opdat de huisknecht medeplichtig zij, alleen als de eerste minister het parlement slechts bezoekt als de president verkiezingen uit zal schrijven'

Vertaalsleutel:

p = de staatsgeheimen zijn aanwezig in de kluis

q = de huisknecht is medeplichtig

r = de eerste minister bezoekt het parlement

s = de president zal verkiezingen uitschrijven

Vertaling: $(p \to q) \to (r \to s)$

Het hoofdvoegteken is 'alleen als', dus de zin is van de vorm 'A alleen als B', oftewel 'alleen als B, (dan) A'. We weten dat dit vertaald wordt als $A \to B$, waarbij A = 'de aanwezigheid van staatsgeheimen is voldoende opdat de huisknecht medeplichtig zij' en B = 'de eerste minister bezoekt het parlement slechts als de president verkiezingen uit zal schrijven'. Verder met de analyse van A. Deze is van de vorm 'C is voldoende opdat D' (of: 'C is een voldoende voorwaarde voor D'). De zinnen C en D zijn precies de atomen p en q en A wordt dus vertaald als $p \to q$. Onze vertaling tot nu toe is dus $(p \to q) \to B$. Hier is B van de vorm 'E slechts als F', of 'slechts als F dan E'. De zinnen E en F zijn de atomen r en s, dus B wordt vertaald als $r \to s$ en de hele zin als: $(p \to q) \to (r \to s)$.

'zijn verlegenheid is niet onverklaarbaar, tenzij je zijn verleden niet kent of zijn moeder nooit ontmoet hebt'.

Vertaalsleutel:

p = zijn verlegenheid is verklaarbaar

q = je kent zijn verleden

r = je hebt zijn moeder (ooit) ontmoet

Vertaling: $\neg\neg p \leftrightarrow \neg(\neg q \vee \neg r)$

De vorm van de zin is 'A tenzij B', met A = 'zijn verlegenheid is niet onverklaarbaar' en B = 'je kent zijn verleden niet of hebt zijn moeder nooit ontmoet'. Dit is dus

$A \leftrightarrow \neg B$. De zin A is van de vorm 'niet C', of $\neg C$, met C = 'zijn verlegenheid is onverklaarbaar', wat weer van de vorm $\neg D$ is, met $D = p$. Dus A is $\neg\neg p$. We hebben nu $\neg\neg p \leftrightarrow \neg B$. Hier is B van de vorm 'E of F', dus $E \vee F$, met E = 'je kent zijn verleden niet' en F = 'je hebt zijn moeder nooit ontmoet'. E vertaalt als $\neg q$ en F als $\neg r$. De hele vertaling wordt dan $\neg\neg p \leftrightarrow \neg(\neg q \vee \neg r)$. Wie als eerste atoom had 'zijn verlegenheid is onverklaarbaar' krijgt een andere vertaalsleutel (p = zijn verlegenheid is onverklaarbaar) en ook een andere vertaling: $\neg p \leftrightarrow \neg(\neg q \vee \neg r)$ (er zit nu nog een $\neg$ in p).

Tenslotte laten we een aantal zinnen met hun vertalingen volgen, zonder commentaar. Ga na dat de vertalingen correct zijn (oefenen, oefenen, oefenen...).

(i). 'Als de beren broodjes smeren, is de bakker binnen, mits de boeren buiten blijven.'

Vertaalsleutel:

p = de beren smeren broodjes

q = de bakker is binnen

r = de boeren blijven buiten

Vertaling: $r \to (p \to q)$

(ii). 'Alleen als het woud wandelt weet Willem wie zijn werk waardeert hoewel het warm noch waterig is tenzij wrakke weduwen wenen.'

Vertaalsleutel:

p = het woud wandelt

q = Willem weet wie zijn werk waardeert

r = het is warm

s = het is waterig

t = wrakke weduwe wenen

Lezing 1: (Alleen als [het woud wandelt] [weet Willem wie zijn werk waardeert]) hoewel ([⟨het warm⟩ noch ⟨waterig is⟩] tenzij [wrakke weduwen wenen]).

Vertaling 1: $(q \to p) \wedge ((\neg r \wedge \neg s) \leftrightarrow \neg t)$

Lezing 2: ([Alleen als ⟨het woud wandelt⟩ ⟨weet Willem wie zijn werk waardeert⟩] hoewel [⟨het warm⟩ noch ⟨waterig is⟩]) tenzij (wrakke weduwen wenen).

Vertaling 2: $((q \to p) \wedge (\neg r \wedge \neg s)) \leftrightarrow \neg t$

(iii). 'Hoewel het grombelt en greurt zal ik gnoelen of knieken, mits de grolm niet verdreurt en de drabilons prieken, als Dabbel en Brauw hun farmarilons strieken.'

Vertaalsleutel:

p = het grombelt

q = het greurt

r = ik zal gnoelen

s = ik zal knieken

t = de grolm verdreurt

u = de drabilons prieken

v = Dabbel striekt zijn farmarilon

w = Brauw striekt zijn farmarilon

Lezing 1: ([Hoewel het grombelt en greurt zal ik gnoelen of knieken], mits [de grolm niet verdreurt en de drabilons prieken]), als (Dabbel en Brauw hun farmarilons strieken).

Vertaling 1: $(v \wedge w) \to (((\neg t \wedge u) \to ((p \wedge q) \wedge (r \vee s)))$

Lezing 2: (Hoewel het grombelt en greurt zal ik gnoelen of knieken), mits ([de grolm niet verdreurt en de drabilons prieken], als [Dabbel en Brauw hun farmarilons strieken]).

Vertaling 2: $((v \wedge w) \to (\neg t \wedge u)) \to ((p \wedge q) \wedge (r \vee s))$

(iv). 'Dit is een zin met tamelijk lange atomaire proposities en een schrijnend gebrek aan welke betekenisvolle inhoud dan ook, mits ik dit soort geklets lang genoeg volhoud, hoewel het niet nodig is om nu werkelijk een zin van een pagina te schrijven, tenzij de lezers dat grappig of anderszins onderhoudend zouden vinden.'

'([Dit is een zin met tamelijk lange atomaire proposities en een schrijnend gebrek aan welke betekenisvolle inhoud dan ook], mits [ik dit soort geklets lang genoeg volhoud]), hoewel ([het niet nodig is om nu werkelijk een zin van een pagina te schrijven], tenzij [de lezers dat grappig of anderszins onderhoudend zouden vinden]).'

Vertaalsleutel:

p = dit is een zin met tamelijk lange atomaire proposities

q = dit is een zin met een schrijnend gebrek aan welke betekenisvolle inhoud dan ook

r = ik hou dit soort geklets lang genoeg vol

s = het is nodig om nu werkelijk een zin van een pagina te schrijven

t = de lezers zouden dat grappig vinden

u = de lezers zouden dat anderszins onderhoudend vinden

Vertaling: $(r \to (p \wedge q)) \wedge (\neg s \leftrightarrow \neg(t \vee u))$

(v). 'Eigenlijk is deze zin niet werkelijk veel meer dan gewoon een erg lange atomaire propositie die dus per definitie niet verder analyseerbaar is, waarbij je je wel moet afvragen of deze zin ook werkelijk waar is, wat inhoudt dat het best wel eens een samengestelde propositie zou kunnen zijn.'

Vertaalsleutel: p = 'Eigenlijk is deze zin niet werkelijk veel meer dan gewoon een erg lange atomaire propositie die dus per definitie niet verder analyseerbaar is, waarbij je je wel moet afvragen of deze zin ook werkelijk waar is, wat inhoudt dat het best wel eens een samengestelde propositie zou kunnen zijn.'

Vertaling: p

(vi). 'Deze implicatieve zin is onwaar, mits hij uit een waar antecedent en een onware consequent bestaat.'

Vertaalsleutel:

p = deze implicatieve zin is waar

q = hij bestaat uit een waar antecedent en een onware consequent

Vertaling: $q \to \neg p$

Realiseer je dat q niet verder geanalyseerd kan worden als q_1 = 'hij bestaat uit een waar antecedent' en q_2 ='hij bestaat uit een onware consequent'. Waarom is een dergelijke analyse niet gewenst?

NB. is deze zin waar of onwaar? (Stel dat p waar is, wat gebeurt er dan met q? En dus met de hele zin? Gebeurt er dan nog iets met p? Stel vervolgens dat q waar is, wat gebeurt er dan met p? En dus met de hele zin? En dus met p? En dus ...) Mooi vak, die logica.

And back to reality ...

4. Samenvatting

Vertaling van de voegtekens:

4.1. Niet. Niet $A \approx \neg A$

Non-: %%% non-## $\approx$ ¬%%%##

On-: %%% on-## $\approx$ ¬%%%##

4.2. En. A en $B \approx A \wedge B$

Hoewel: A hoewel $B \approx A \wedge B$

Maar: A maar $B \approx A \wedge B$

Noch: A noch $B \approx \neg A \wedge \neg B$

Zowel...als: Zowel A als $B \approx A \wedge B$

4.3. Of. (inclusieve-of): A of $B \approx A \vee B$

Of ..., of ... (exclusieve-of):

$$\begin{aligned} \text{Of } A\text{, of } B \ &\approx\ (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B) \\ &\text{Eq } A \leftrightarrow \neg B \\ &\text{Eq } \neg A \leftrightarrow B \\ &\text{Eq } \neg(A \leftrightarrow B) \end{aligned}$$

4.4. Als... dan. Als A dan B $\approx$ $A \to B$

Slechts als/alleen als: Slechts als A dan B $\approx$ $B \to A$

Mits: A mits B $\approx$ $B \to A$

Impliceert: A impliceert B $\approx$ $A \to B$

Voldoende voorwaarde: A is een voldoende voorwaarde voor B $\approx A \to B$

Noodzakelijke voorwaarde: A is een noodzakelijke voorwaarde voor B $\approx$ $B \to A$

4.5. Bi-implicatie. A bi-impliceert B $\approx$ $A \leftrightarrow B$

Desda: A dan en slechts dan als B $\approx$ $A \leftrightarrow B$

Noodzakelijke en voldoende voorwaarde: A is een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor B $\approx$ $A \leftrightarrow B$

Tenzij:

$$
\begin{aligned}
A \text{ tenzij } B &\approx A \leftrightarrow \neg B \\
&\text{Eq } \neg A \leftrightarrow B \\
&\text{Eq } \neg(A \leftrightarrow B)
\end{aligned}
$$

4.6. Niet-waarheidsfunctionele voegtekens. Omdat - Dus - Want

5. Opgaven

1. Vertaal, indien mogelijk, de volgende zinnen naar de taal van de propositielogica (en vergeet de vertaalsleutel niet).
   i. Hoewel 1984 een rampjaar was, is het niet zo dat George Orwell gelijk had.
   ii. George Orwell had gelijk, mits Marilyn Monroe een gevaar is voor de mensheid.
   iii. Alleen als 1984 een rampjaar was, is het zo dat George Orwell gelijk had, tenzij Marilyn Monroe een gevaar is voor de mensheid.
   iv. Omdat Marilyn Monroe een gevaar voor de mensheid is, had George Orwell gelijk.
   v. Slechts als Marilyn Monroe een gevaar voor de mensheid is en 1984 geen rampjaar was, had George Orwell geen gelijk.
2. Idem voor:
   i. Hard drugs zijn verboden, maar alcohol niet.
   ii. Als alcohol verboden is, dan zijn hard drugs dat ook.
   iii. Hard drugs zijn verboden, tenzij alcohol dat niet is.
   iv. Hard drugs zijn verboden dan en slechts dan als alcohol ook verboden is.
   v. Als soft drugs verboden zijn, dan zijn alcohol en hard drugs dat ook.
   vi. Alcohol is niet verboden, maar soft drugs zijn dat wel.

vii. Soft drugs zijn verboden of hard drugs zijn niet verboden.

viii. Het is niet zo dat soft drugs niet verboden zijn en hard drugs wel.

ix. Als hard drugs en soft drugs niet verboden zijn, dan is alcohol dat ook niet.

x. Alleen als hard drugs verboden zijn maar alcohol niet, zijn soft drugs verboden.

3. Vertaal zo goed mogelijk:

i. Roken is toegestaan, tenzij expliciet verboden, of door wetenschappelijk onderzoek ongezond bevonden.

ii. Als de Dunlop-hypothese voldoende is om de welvaartstheorie te ontzenuwen, dan komt het Iwasawa effect niet voor, tenzij het Leninveld stochastisch relevant blijkt te zijn.

iii. De noodzakelijke voorwaarde voor het functioneren van het studiebeurzenstelsel is een gevolg van stelling 4.3 uit deze syllabus.

iv. Deze syllabus, mits goed geschreven, voert tot resultaat.

v. Ondanks de afwezigheid van ethisch bewustzijn bij huisdieren is het doodliggen van een mus voor een kat voldoende om van het toebrengen van letsel af te zien.

vi. Dankzij de afwezigheid van ethisch bewustzijn bij mensen is het in de wei huppelen van een lammetje voor een mens niet voldoende om van het toebrengen van letsel af te zien.

vii. Mensen kunnen niet vleeseters en tevens humaan zijn.

4. Vertaal, met gebruikmaking van de gegeven vertaalsleutel, de volgende formules naar Abominabel Behoorlijk Nederlands.

Vertaalsleutel: p = O.B. Bommel is een heer van stand.

q = Tom Poes speelt het geweten van O.B. Bommel.

r = O.B. Bommel houdt van een eenvoudige maaltijd.

s = O.B. Bommel houdt van een voedzame maaltijd.

t = Tom Poes is een eigenwijs opdondertje.

i. $p \wedge q$

ii. $q \to t$

iii. $((r \wedge s) \wedge t) \to q$

iv. $(\neg p \wedge (r \wedge s)) \to \neg t$

v. $\neg t \to (\neg q \vee (r \wedge s))$

vi. $(p \leftrightarrow q) \to t$

vii. $(r \wedge s) \wedge (\neg q \vee (p \to t))$

5. Idem voor:

Vertaalsleutel: p = Meer mensen worden sociaal bewust.

q = Meer mensen worden vegetariër.

r = De huidige slachtmethoden worden verboden.

s = Er wordt een matig milieubeleid gevoerd.

t = Een katalysator voor auto's is verplicht.

i. $\neg t \to s$

ii. $(p \wedge q) \to r$

iii. $q \to \neg\neg p$

iv. $(q \vee t) \leftrightarrow p$

v. $p \to (\neg s \wedge t)$

vi. $(\neg r \wedge \neg t) \to (\neg p \vee \neg s)$

vii. $(p \to q) \wedge (\neg s \to t)$

HOOFDSTUK 7

Semantiek van de propositielogica 2

1. De valuatiefunctie

De voorgaande hoofdstukken hebben ons laten zien uit welke symbolen de taal van de propositielogica bestaat, welke tekenrijen legale formules zijn en hoe we talige uitspraken kunnen vertalen in deze propositielogische taal. Bovendien weten we dat we met waarheidstafels de waarheidswaarde van een propositie kunnen bepalen, als de waarheidswaarden van de atomen gegeven zijn. Wat we uiteindelijk willen, is een methode om te bepalen of redeneringen al dan niet correct zijn. Daarvoor zullen we dus een (logisch) geldigheids- of waarheidsbegrip moeten definiëren . Aangezien waarheidstafels een erg omslachtige methode vormen voor de bepaling van waarheidswaarden en geldigheid zullen we eerst een alternatieve methode bestuderen, die gebruik maakt van zogenaamde waarderingen of valuaties. Voordat de abstracte definitie volgt, is een korte uitleg wellicht handig. waardering valuatie

Een valuatie (afgekort met V) is een functie die waarheidswaarden aan atomen toekent. Als we stellen dat de waarheidswaarde van p_0 en p_1 gelijk aan 1 is en die van p_2 en p_3 gelijk aan 0, dan hebben we daarmee een valuatie op p_0, p_1, p_2, p_3 vastgelegd. Namelijk een valuatie V, zodat $V(p_0) = V(p_1) = 1$ en $V(p_2) = V(p_3) = 0$. Als we zo'n valuatie bekijken is het natuurlijk om de taal te bekijken met alleen de eindige verzameling atomen $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$. We zullen met deze 'inperking' van de taal flexibel omgaan: de taal en daarmee de valuaties die we bekijken zijn gegeven door een eindige verzameling relevante atomen.

Je kunt aan een valuatie denken als aan een mogelijke wereld (of een mogelijke toestand van de wereld). Stel dat we het hebben over twee atomaire proposities, p en q, die resp. staan voor 'het is lekker weer' en 'ik heb hoofdpijn'. Nu is er een wereld denkbaar waarin beide proposities onwaar zijn: het is snertweer, maar ik heb tenminste geen hoofdpijn. Dit zou overeenkomen met de volgende valuatie: $V(p) = V(q) = 0$. Er is echter ook een wereld denkbaar waarin alleen de eerste propositie onwaar is: het is snertweer en ik heb ook nog hoofdpijn (dit is duidelijk de slechtste wereld). De hiermee corresponderende valuatie is natuurlijk: $V(p) = 0$ en $V(q) = 1$. Dan is er nog een mogelijke wereld waarin alleen de tweede propositie onwaar is: het is lekker weer en ik heb ook geen hoofdpijn (de beste wereld). Met bijbehorende valuatie: $V(p) = 1$, $V(q) = 0$. Tenslotte (je raadt het al) is er nog een denkbare wereld waarin beide proposities waar zijn: het is lekker weer maar ik heb wel hoofdpijn. Oftewel $V(p) = V(q) = 1$. mogelijke wereld

Het zal oplettende lezertjes opgevallen zijn dat dit verdacht veel lijkt op de eerste twee kolommen van een waarheidstafel met twee atomen:

p	q	A
0	0	$
0	1	$
1	0	$
1	1	$

Iedere formule A die slechts de atomen p en q bevat zal een waarheidstafel van deze vorm hebben (waarbij $ voor 0 of 1 staat). De vier ellipsen onder p en q komen precies overeen met de boven geschetste vier mogelijke werelden en dus met de vier mogelijke valuaties.

Eigenlijk wisten we dus al wat een valuatie is: het is een rij nullen en enen onder de atomen in een waarheidstafel. In paragraaf 5.2 zeiden we al dat een formule verschillende 'toestanden' kent ('A' hierboven kent er vier). Deze toestanden corresponderen precies met de vier mogelijke valuaties. Het hoeft geen betoog, dat als de waarheidswaarden van de atomen bekend zijn (middels een valuatie), dat dan ook de waarheidswaarden van samengestelde formules (in principe) bekend zijn — dat hebben we al gezien toen we ons met waarheidstafels bezig hielden. Om deze reden kunnen we ook spreken van de valuatie van een formule: als $V(p) = V(q) = 1$, dan zal ook $V(p \wedge q) = 1$, etc. Het wordt tijd voor de officiële definitie.

Definitie 1.1. Een valuatie V is een afbeelding die aan formules van de propositielogica waarheidswaarden toekent. Om te beginnen wordt aan de propositieletters een waarheidswaarde toegekend. Door de waarheidsfunctionaliteit van de voegtekens is, gegeven de waarheidswaarden van de in een formule voorkomende propositieletters, de waarheidswaarde van de hele formule uit te rekenen. Deze valuatie V van formules is als volgt gedefinieerd:

1. i. $V(p_i) \in \{0, 1\}$ voor alle i,

   ii. $V(\bot) = 0$ (sem$\bot$)

2. i. $V(\neg A) = 1$ desda $V(A) = 0$ (sem$\neg$)

   Alternatief: $V(\neg A) = 1 - V(A)$

   ii. $V(A \wedge B) = 1$ desda $V(A) = 1$ en $V(B) = 1$ (sem$\wedge$)

   Alternatief: $V(A \wedge B) = \mathsf{min}(V(A), V(B))$

   iii. $V(A \vee B) = 1$ desda $V(A) = 1$ en/of $V(B) = 1$ (sem$\vee$)

   Alternatief: $V(A \vee B) = \mathsf{max}(V(A), V(B))$

   iv. $V(A \to B) = 1$ desda $V(A) = 0$ en/of $V(B) = 1$ (sem$\to$)

   Alternatief: $V(A \to B) = \mathsf{max}(1 - V(A), V(B))$

   v. $V(A \leftrightarrow B) = 1$ desda $V(A) = V(B)$ (sem$\leftrightarrow$)

   Alternatief: $V(A \leftrightarrow B) = V(A) + V(B) + 1 \ (\mathsf{mod}\ 2)$
   (We nemen $n \ \mathsf{mod}\ 2 := 0$, als n is even en $n \ \mathsf{mod}\ 2 := 1$ als n is oneven.)

Clausule 1.(i) zegt dat de valuaties van atomen 0 of 1 zijn: een atoom is gewoon waar of onwaar. Dit komt dus overeen met de hierboven geïntroduceerde notie van mogelijke werelden. Volgens 1.(ii) is falsum in iedere mogelijke wereld onwaar. Dit klopt ook als we kijken hoe we falsum in paragraaf 4.1 geïntroduceerd hebben. We hadden nog een propositieconstante $\top$ (true) kunnen invoeren, die dan zou staan voor de altijd ware propositie. Voor $\top$ zou dan gelden dat $V(\top) = 1$ voor alle valuaties.

Het 'sem$\perp$' is een afkorting voor 'semantische regel voor de $\perp$'. Dit wil dus zeggen dat deze clausule de semantiek (betekenis) van de $\perp$ vastlegt.

Clausule 2 zegt tenslotte dat de waarheidswaarde van een samengestelde formule afhankelijk is van de waarheidswaarden van de samenstellende delen. Merk op dat deze afhankelijkheid precies overeenstemt met de waarheidstafels voor de verschillende voegtekens, zoals we die in paragraaf 5.1 hebben leren kennen. Uit de waarheidstafel voor de $\wedge$ blijkt bijvoorbeeld dat $A \wedge B$ alleen waar is als zowel A als B waar zijn. In clausule 2 staat dat $V(A \wedge B) = 1$ desda $V(A) = V(B) = 1$ en dat is natuurlijk precies hetzelfde. Omdat waarheidstafels en valuaties zo goed met elkaar overeenstemmen, leggen de waarheidstafels voor de voegtekens natuurlijk net zo goed de betekenis van de voegtekens vast als bovenstaande definitie. We hadden dus ook 'sem$\wedge$' naast de waarheidstafel voor de $\wedge$ kunnen schrijven. ❑

Laten we eens kijken wat we met dit valuatiebegrip kunnen doen. We geven een voorbeeld:

i. Gegeven een valuatie V, met $V(p) = V(q) = 1$ en $V(r) = 0$. Bereken $V(p \to q \vee r)$.

   Het hoofdvoegteken is de $\to$. Met sem$\to$ volgt dat $V(p \to q \vee r) = 1$ desda $V(p) = 0$ (*) of $V(q \vee r) = 1$ (**). We hebben $V(p) = 1$ zodat (*) fout gaat. Dan moet dus (**) het geval zijn. Volgens sem$\vee$: $V(q \vee r) = 1$ desda $V(q) = 1$ of $V(r) = 1$. Er is gegeven dat $V(q) = 1$, dus (**) is het geval, ergo $V(p \to q \vee r) = 1$.

   Alternatief:
   $V(p \to q \vee r) = \mathsf{max}(1 - V(p), \mathsf{max}(V(q), V(r))) = \mathsf{max}(1 - 1, \mathsf{max}(1, 0)) = \mathsf{max}(0, 1) = 1$.

ii. Neem dezelfde valuatie als in (i). Bereken $V((\neg q \to r) \leftrightarrow (\neg r \wedge \neg p))$.

   Volgens sem$\leftrightarrow$: $V((\neg q \to r) \leftrightarrow (\neg r \wedge \neg p)) = 1$ desda $V(\neg q \to r) = V(\neg r \wedge \neg p)$. We berekenen eerst $V(\neg q \to r)$: met sem$\to$ volgt dat $V(\neg q \to r) = 1$ desda $V(\neg q) = 0$ (*) of $V(r) = 1$. Uit (*) met sem$\neg$: $V(q) = 1$. Dat klopt, dus (*) is het geval, zodat $V(\neg q \to r) = 1$. Nu moet ook $V(\neg r \wedge \neg p) = 1$ het geval zijn. Met sem$\wedge$: $V(\neg r) = V(\neg p) = 1$. Met sem$\neg$: $V(r) = 0$. Dat klopt. Nu moet ook $V(\neg p) = 1$ nog het geval zijn. Met sem$\neg$: $V(p) = 0$. Dat klopt niet met de gegeven valuatie. We kunnen niet aan de 'eisen' voldoen, dus is onze aanvankelijke veronderstelling fout, dus $V((\neg q \to r) \leftrightarrow (\neg r \wedge \neg p)) = 0$.

iii. Gegeven: $V(p \to q \vee r) = 0$. Bereken de valuatie van de atomen p, q en r.

   Uit het gegeven volgt met sem$\to$ dat $V(p) = 1$ en $V(q \vee r) = 0$. Met sem$\vee$ volgt dat $V(q) = V(r) = 0$.

iv. Laat zien dat voor alle valuaties V geldt dat $V(p \vee \neg p) = 1$.

   Clausule 1.(i) van definitie 7.1.1 zegt dat $V(p) = 0$ of $V(p) = 1$. Stel $V(p) = 0$. Dan is met sem$\neg$: $V(\neg p) = 1$. En uit $V(\neg p) = 1$ volgt met sem$\vee$: $V(p \vee \neg p) = 1$.

Stel $V(p) = 1$. Dan volgt onmiddelijk met sem$\vee$: $V(p \vee \neg p) = 1$. Dus voor alle valuaties V geldt dat $V(p \vee \neg p) = 1$.

Alternatief: $V(p \vee \neg p) = \mathsf{max}(V(p), V(\neg p)) = \mathsf{max}(V(p), 1 - V(p))) = 1$.

We zien dat we, gegeven een valuatie voor atomen, de valuaties van met deze atomen opgebouwde formules kunnen uitrekenen ((i) en (ii)) of soms ook andersom (iii). Voorbeeld (iv) liet zien dat we ook algemene, valuatie-onafhankelijke eigenschappen van bepaalde proposities kunnen aantonen.

De overeenkomst tussen waarheidstafels en valuaties is totaal; we laten dat zien aan de hand van de laatste waarheidstafel uit Paragraaf 4.2 die we hieronder nog eens herhalen.

De valuatie V met $V(p) = V(r) = 0$ en $V(q) = 1$ is in deze tafel uitgerekend in de derde rij. In deze rij staat onder de formule $(\neg q \wedge p) \vee (p \to \neg r)$ een 1. Als we met de semantische regels $V((\neg q \wedge p) \vee (p \to \neg r))$ gaan uitrekenen, zullen we zien dat hier ook 1 uitkomt: omdat $V(r) = 0$ volgt met sem$\neg$ dat $V(\neg r) = 1$. Met sem$\to$: $V(p \to \neg r) = 1$ en met sem$\vee$: $V((\neg q \wedge p) \vee (p \to \neg r)) = 1$. Hetzelfde kan gedaan worden voor de andere rijen uit de waarheidstafel.

We hebben in deze paragraaf een valuatie opgevat als een functie van formules naar waarheidswaarden: je stopt er een formule in en er komt een waarheidswaarde uit (oftewel $V : \mathsf{FOR} \to \{0, 1\}$). Er is echter een geheel andere benadering van het valuatiebegrip mogelijk. We zullen deze benadering in de volgende paragraaf behandelen.

2. Valuaties als modellen

Die Welt ist alles was der Fall ist.

Wittgenstein, Tractatus Logicus Philosophicus, 1, [**Wit61**]

In de vorige paragraaf hebben we het over de notie van ‘mogelijke wereld’ gehad. We zagen dat we een valuatie kunnen opvatten als een mogelijke wereld: ‘een wereld in een bepaalde toestand’. Verschillende mogelijke werelden corresponderen met verschillende valuaties en maken dus verschillende formules waar. Onze opvatting van een valuatie als een functie van formules naar waarheidswaarden doet geen recht aan ons idee van mogelijke werelden. We zullen hier een benadering bespreken, die wat dat betreft bevredigender is.

dubbele turnstile

Om te beginnen hebben we een formele vertaling nodig van ‘waar maken’. Daarvoor gebruiken we de zgn. dubbele turnstile (dubbel draaihekje): $\models$. Dit symbool wordt gelezen als ‘maakt waar’. We kunnen nu dus iets opschrijven als

‘mogelijke wereld $W \models$ formule F’, wat we lezen als ‘de mogelijke wereld W maakt de formule F waar’. Geheel analoog hebben we ook $W \not\models F$, wat staat voor ‘W maakt F niet waar’. Wat formules zijn weten we al. Maar we weten ook wat mogelijke werelden zijn: dat zijn gewoon valuaties. In de logica noemen we een mogelijke wereld vaker een model (van de wereld dus). Deze term zullen we vanaf nu ook gebruiken. Een valuatie is dus een model en we kunnen dus iets tegenkomen als $V \models p \vee q$. We moeten nu vastleggen wanneer een valuatie een formule waar maakt. Het zal geen verbazing wekken dat dit erg veel gaat lijken op de definitie van valuaties als functies: we willen uiteraard dat beide opvattingen in principe hetzelfde doen —dus dat$V \models A$ en $V(A) = 1$ met elkaar overeenkomen. Hier volgt de definitie van valuaties als model —oftewel de definitie van de dubbele turnstile:

Definitie 2.1. (Valuaties als modellen)

1. $V \models p$ desda $V(p) = 1$
2. $V \not\models \bot$ (sem$\bot$)
3. $V \models \neg A$ desda $V \not\models A$ (sem$\neg$)
4. $V \models (A \wedge B)$ desda $V \models A$ en $V \models B$ (sem$\wedge$)
5. $V \models (A \vee B)$ desda $V \models A$ en/of $V \models B$ (sem$\vee$)
6. $V \models (A \to B)$ desda $V \not\models A$ en/of $V \models B$ (sem$\to$)
7. $V \models (A \leftrightarrow B)$ desda ($V \models A$ en $V \models B$) of ($V \not\models A$ en $V \not\models B$) (sem$\leftrightarrow$)

❑

Wie Definitie 1.1 er op naslaat, zal zien dat Definitie 2.1 hier één op één mee correspondeert. Om een voorbeeld te nemen: $V(A \wedge B) = 1$ desda $V(A) = 1$ en $V(B) = 1$ volgens Definitie 1.1 en $V \models (A \wedge B)$ desda $V \models A$ en $V \models B$ volgens Definitie 2.1. Uitleg lijkt haast overbodig.

Het grappige is dat de wereld (valuatie V) 'alles was der Fall ist' al vastligt als je weet welke atomen waar zijn. Je hoeft dus niet alle formules te waarderen —uit de waarden van de atomen volgen de waarderingen van de overige formules vanzelf. Merk op dat Wittgenstein (zie citaat) de zaken op z'n kop zet. Hij geeft, om zo te zeggen, een grote lijst van proposities en zegt 'dat is de wereld'. Uiteindelijk komt dat op hetzelfde neer als onze valuaties: we zoeken in zijn lijst alle atomen p_i op en definiëren $V(p_i) = 1$ voor die p_i's en $V(p_j) = 0$ voor de atomen die niet in zijn lijst staan. En ziedaar: Wittgenstein's wereld is geherformuleerd als valuatie.

We gaan nog eens dezelfde voorbeelden bekijken die in de vorige paragraaf behandeld werden, echter nu met ons nieuwe valuatiebegrip.

Hier is een voorbeeld.

i. Gegeven een valuatie V, met $V(p) = V(q) = 1$ en $V(r) = 0$. Laat zien dat $V \models (p \to q \vee r)$.

   Het hoofdvoegteken is de $\to$. Met sem$\to$ volgt dat $V \models (p \to q \vee r)$ desda $V \not\models p$ (*) of $V \models (q \vee r)$ (**). We hebben $V(p) = 1$ dus $V \models p$, zodat (*) fout gaat. Dan moet dus (**) het geval zijn. Volgens sem$\vee$ geldt: $V \models (q \vee r)$ desda $V \models q$ of $V \models r$. Er is gegeven dat $V(q) = 1$, dus $V \models q$, i.e. (**) het geval is. Ergo $V \models (p \to q \vee r)$.

ii. Neem dezelfde valuatie als in (i). Zoek uit of $V \models ((\neg q \to r) \leftrightarrow (\neg r \wedge \neg p))$.

   We laten zien dat $V \not\models ((\neg q \to r) \leftrightarrow (\neg r \wedge \neg p))$. Veronderstel maar eens dat $V \models ((\neg q \to r) \leftrightarrow (\neg r \wedge \neg p))$. Het hoofdvoegteken is de $\leftrightarrow$. Volgens sem$\leftrightarrow$ vinden we: $V \models ((\neg q \to r) \leftrightarrow (\neg r \wedge \neg p))$ desda $V \models (\neg q \to r)$ en $V \models (\neg r \wedge \neg p)$, of $V \not\models (\neg q \to r)$ en $V \not\models (\neg r \wedge \neg p)$. We zoeken eerst uit of $V \models (\neg q \to r)$. Met sem$\to$ volgt dat $V \models (\neg q \to r)$ desda $V \not\models \neg q$ (*) of $V \models r$. Uit (*) met sem$\neg$: $V \models q$. Dus $V(q) = 1$ moet het geval zijn. Dat klopt, dus (*) is het geval, zodat $V \models (\neg q \to r)$. Nu moet ook $V \models (\neg r \wedge \neg p)$ het geval zijn. Met sem$\wedge$ vinden we: $V \models \neg r$ en $V \models \neg p$. Met sem$\neg$: $V \not\models r$, oftewel $V(r) = 0$. Dat klopt. Nu moet ook $V \models \neg p$ nog het geval zijn. Met sem$\neg$ vinden we: $V \not\models p$, oftewel $V(p) = 0$. Dat klopt niet met de gegeven valuatie. We kunnen dus niet aan de 'eisen' voldoen. Blijkbaar is onze aanvankelijke veronderstelling fout, dus $V \not\models ((\neg q \to r) \leftrightarrow (\neg r \wedge \neg p))$.

iii. Gegeven: $V \not\models (p \to q \vee r)$. Welke van de atomen p, q en r worden door V waargemaakt?

Uit het gegeven volgt met sem$\to$ dat $V \models p$ en $V \not\models (q \vee r)$. Met sem$\vee$ volgt dat $V \not\models q$ en $V \not\models r$. Dus alleen p wordt door V waargemaakt.

iv. Laat zien dat voor alle valuaties V geldt dat $V \models (p \vee \neg p)$.

Stel dat dit niet waar is. Dan geldt het dus niet voor alle valuaties, dus is er minstens één valuatie waarvoor het niet geldt. Dus is er een valuatie V, zodat $V \not\models (p \vee \neg p)$. Met sem$\vee$: $V \not\models p$ (dus $V(p) = 0$) en $V \not\models \neg p$. Met sem$\neg$: $V \models p$ (dus $V(p) = 1$). Tegenspraak. Zo'n valuatie kan dus niet bestaan, dus inderdaad $V \models (p \vee \neg p)$ voor alle valuaties V.

Intermezzo: wie voor het eerst met logica kennismaakt, krijgt licht de indruk dat 'er maar wat gedaan wordt', kortom dat de logica niet erg 'logisch' is. Wie zal bijvoorbeeld 'als de bus vol is, wacht ik op de volgende' uit zichzelf opvatten als 'de bus is niet vol of ik wacht op de volgende'? Het is tijd om dit beeld wat te retoucheren: de voegtekens zijn wat ze lijken!

Definitie 2.1 vertelt ons al dat $\bot$, $\neg$ en $\wedge$ hun natuurlijke interpretatie hebben:

- $V \not\models \bot$: het onware is nooit waar;
- $V \models \neg A \Leftrightarrow V \not\models A$: niet-$A$ is waar in V als A niet waar is in V;
- $V \models A \wedge B \Leftrightarrow V \models A$ en $V \models B$: $A \wedge B$ is waar in V als A en B beide waar zijn in V.

We zien dat de $\bot$, $\neg$ en $\wedge$ worden geïnterpreteerd als hun meta-versies: $\bot$ is de onwaarheid, $\neg$ is niet en $\wedge$ is en. Gelukkig geldt zoiets ook voor de andere voegtekens.

- $V \models A \vee B \Leftrightarrow V \models A$ of $V \models B \vee A$ is waar in V als A waar is in V of als B waar is in V. Dit is een herformulering van 2.(iii) door ook in de omgangstaal gebruik te maken van de inclusieve-of.
- $V \models A \to B \Leftrightarrow (V \models A \Rightarrow V \models B)$: $A \to B$ is waar in V als de waarheid van A in V die van B in V inhoudt. Hier valt iets te bewijzen: we moeten aantonen dat de linker- en rechterkant van de $\Leftrightarrow$ gelijkwaardig zijn. Welnu, stel dat $V \models A \to B$. We moeten aantonen dat $V \models B$ als $V \models A$. Veronderstel dus dat $V \models A$. Aangezien $V \models A \to B$ weten we dat $V \not\models A$ of $V \models B$. Omdat we al hadden dat $V \models A$ kan $V \not\models A$ niet het geval zijn. Dus $V \models B$ —en dat is precies wat we moesten hebben.

Nu de andere kant op: neem aan dat $V \models A \Rightarrow V \models B$. We moeten laten zien dat $V \models A \to B$. Stel nu dat $V \not\models A \to B$. Sem$\to$ vertelt ons dat dan $V \models A$ en $V \not\models B$. Maar we hadden al dat $V \models A \Rightarrow V \models B$. Omdat $V \models A$ moet dus ook $V \models B$ het geval zijn. Tegenspraak met $V \not\models B$. Onze veronderstelling $V \not\models A \to B$ was dus fout, ergo $V \models A \to B$.

- $V \models A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (V \models A \Leftrightarrow V \models B)$: $A \leftrightarrow B$ is waar in V als A en B tegelijk waar of onwaar zijn in V. Hier valt iets soortgelijks te bewijzen als bij de $\to$. We zullen het bewijs achterwege laten, omdat het op geheel analoge wijze gaat.

De moraal van het voorgaande: onze semantiek levert precies wat de voegtekens zeggen: alle voegtekens worden als zichzelf op het meta-niveau geïnterpreteerd. De bovenstaande regels zijn overigens soms ook handig om werk te besparen. We doen voorbeeld (i) (zie hierboven) nog eens over:

$$\begin{aligned} V \models p \to (q \vee r) \quad &\Leftrightarrow \quad V \models p \Rightarrow V \models q \vee r \\ &\Leftrightarrow \quad V \models p \Rightarrow (V \models q \text{ en/of } V \models r) \end{aligned}$$

($V \models q$ en/of $V \models r$) klopt omdat $V \models q$. Wegens de betekenis van de $\Rightarrow$ klopt nu dus $V \models p \Rightarrow (V \models q$ en/of $V \models r)$ ook, dus $V \models p \to (q \vee r)$. Einde intermezzo.

Er zijn nog enige notationele conventies met de dubbele turnstile verbonden. Hieronder definiëren we enige standaardnotaties:

DEFINITIE 2.2. (NB. $=_{\mathsf{def}}$ staat voor 'betekent/is per definitie' en de $\Rightarrow$ (echte implicatie) is de metataal uitvoering van de gewone $\to$.)

i. $V \models \Gamma =_{\mathsf{def}} V \models A,$ voor alle $A \in \Gamma$

ii. $\Gamma \models A =_{\mathsf{def}} V \models \Gamma \Rightarrow V \models A,$ voor alle valuaties V

iii. $A_1, \ldots, A_n \models B =_{\mathsf{def}} \{A_1, \ldots, A_n\} \models B$

Clausule (i) zegt dat een valuatie een verzameling formules waar maakt, als hij/zij alle formules uit de verzameling waar maakt. Uit deze definitie volgt onmiddellijk dat $V \not\models \Gamma$ indien er minstens één A in Γ is waarvoor geldt dat $V \not\models A$.

Clausule (ii) stelt dat een verzameling Γ een formule A waar maakt, als iedere valuatie die Γ waar maakt tevens A waar maakt (valuaties die Γ niet waar maken hoeven dus niet beschouwd te worden). Merk op dat hier uit volgt dat $\Gamma \not\models A$ indien er tenminste één valuatie V is zodat $V \models \Gamma$ en $V \not\models A$.

Clausule (iii) tenslotte zegt dat de formules A_1 tot en met A_n een formule B waar maken, als de verzameling $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de formule B waar maakt. Dus in het bijzonder als n=1: $A \models B$ als $V \models A \Rightarrow V \models B$. We zeggen ook wel dat B het semantisch gevolg is van $A_1, \ldots, A_n$. ❏ semantisch gevolg

Een paar voorbeelden van deze notaties plus toepassing:

i. Gegeven een valuatie V met $V \models p$ en $V \models q$. Dan hebben we bijvoorbeeld $V \models \{r \to p, q \vee s, p, \neg(\neg p \wedge \neg q)\}$, omdat $V \models r \to p$, $V \models q \vee s$, $V \models p$ en $V \models \neg(\neg p \wedge \neg q)$.

ii. $\{p, \neg(p \wedge \neg q), q \rightarrow r\} \models r$. Er moet dus gelden dat, voor iedere V met $V \models \{p, \neg(p \wedge \neg q), q \rightarrow r\}$, we hebben dat $V \models r$. Bezie nu een V waarvoor geldt $V \models \{p, \neg(p \wedge \neg q), q \rightarrow r\}$ Hieruit volgt: $V \models p$, $V \models \neg(p \wedge \neg q)$, $V \models q \rightarrow r$. Uit $V \models \neg(p \wedge \neg q)$ volgt met sem$\neg$ dat $V \not\models (p \wedge \neg q)$ en met sem$\wedge$ dat $V \not\models p$ of $V \not\models \neg q$. Omdat gegeven is dat $V \models p$, kan $V \not\models p$ niet het geval zijn, dus moet $V \not\models \neg q$ het geval zijn. Met sem$\neg$: $V \models q$. Omdat tevens $V \models q \rightarrow r$, volgt met sem$\rightarrow$ dat $V \models r$. Dus voor een willekeurige V waarvoor geldt $V \models \{p, \neg(p \wedge \neg q), q \rightarrow r\}$ geldt ook $V \models r$.

iii. In navolging van het bovenstaande voorbeeld kunnen we volgens clausule (iii) ook noteren: p, $\neg(p \wedge \neg q), q \rightarrow r \models r$. Zo geldt bijvoorbeeld ook $p \wedge (p \rightarrow q) \models q \leftrightarrow p$. Voor iedere valuatie V geldt namelijk dat

$$V \models p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow V \models q \leftrightarrow p.$$

Als $V \models p \wedge (p \rightarrow q)$ dan met sem$\wedge$: $V \models p$ en $V \models (p \rightarrow q)$. Met sem$\rightarrow$ volgt nu $V \models q$. Dus $V \models p$ en $V \models q$, dus met sem$\leftrightarrow$: $V \models q \leftrightarrow p$.

Opmerking 2.3. In de definitie van $V \models \Gamma$ hebben we niet uitgesloten dat Γ leeg is. Het is echter nogal lastig te bedenken of $V \models \varnothing$ nu wel of niet waar is.

We hebben dat $V \models \varnothing$ waar is desda, voor alle formules A in $\varnothing$, $V \models A$. We kunnen dit ook lezen als: voor alle formules A, als $A \in \varnothing$, dan $V \models A$. Omdat het antecedent van "als als $A \in \varnothing$, dan $V \models A$' altijd onwaar is, is de hele implicatie altijd waar (volgens de manier waarop we in de logica implicaties interpreteren). Dus is $V \models \varnothing$ waar. ❑

Hier zijn nog wat verdere handige notaties.

Definitie 2.4. i. $\Gamma, \Delta \models A =_{\mathsf{def}} \Gamma \cup \Delta \models A$

ii. $\Gamma, A_1, \ldots, A_n \models B =_{\mathsf{def}} \Gamma \cup \{A_1, \ldots, A_n\} \models B$

iii. $\models A =_{\mathsf{def}} \varnothing \models A$

Merk op dat $\models A$ dan en slechts dan als, voor alle V, $V \models A$. ❑

3. Centrale semantische begrippen

Nu we weten hoe 'waarheid' in de propositielogica gedefinieerd is en wat valuaties zijn, hebben we genoeg kennis in huis om ons bezig te houden met enige centrale begrippen uit de logica. De hierna te behandelen begrippen zijn niet specifiek voor de propositielogica, maar duiken telkens weer op, of we ons nu met propositielogica, predikatenlogica, modale logica, tijdslogica, epistemische logica, bewijsbaarheidslogica of 'de-logica-waar-ik-beroemd-mee-ga-worden' logica bezig houden. Daar gaat-ie dan:

vervulbaar
strijdig

3.1. Vervulbaarheid/strijdigheid.

De begrippen *vervulbaar* en *strijdig* hebben betrekking op verzamelingen formules. Om maar met de deur in huis te vallen:

Definitie 3.1. Een verzameling formules Γ is vervulbaar desda er tenminste één valuatie V is zodat $V \models \Gamma$.

semantisch consistent
satisfiable

In plaats van *vervulbaar* zegt men ook soms: *semantisch consistent*. De Engelse term voor *vervulbaar* is: *satisfiable*. ❑

DEFINITIE 3.2. Een verzameling formules Γ is strijdig desda hij niet vervulbaar is. Oftewel: Een verzameling formules Γ is strijdig desda voor alle valuaties V: $V \not\models \Gamma$.

In plaats van *strijdig* zegt men ook soms: *semantisch inconsistent*. De Engelse term voor *strijdig* is: *contradictory*. ❏

semantisch inconsistent
contradictory

Definitie 3.1 zegt dus dat een verzameling formules vervulbaar is, als het mogelijk is om alle formules uit de verzameling waar te maken met dezelfde valuatie. De tegenpool hiervan is het begrip strijdigheid. Een verzameling is strijdig als het nooit mogelijk is om alle formules 'tegelijkertijd' (dus met dezelfde valuatie) waar te maken. Een paar voorbeelden:

Voorbeeld:

i. De verzameling $\{p \vee q, q \to \neg p\}$ is vervulbaar omdat de valuatie V met $V \models q$ en $V \not\models p$ alle formules uit deze verzameling waar maakt.

ii. De verzameling $\{p \wedge q, q \to \neg p\}$ is niet vervulbaar. Iedere valuatie die de formules in deze verzameling zou waar maken, moet onder andere $p \wedge q$ waar maken. Met sem$\wedge$: $V \models p$ en $V \models q$. Maar dan volgt met sem$\neg$ en sem$\to$ dat $V \not\models q \to \neg p$. Er kan dus geen valuatie bestaan die beide formules waar maakt: de verzameling $\{p \wedge q, q \to \neg p\}$ is strijdig.

iii. Is de verzameling $\{p \to q, \neg q \vee (p \leftrightarrow r), (r \wedge \neg p) \to \neg q, p\}$ vervulbaar of strijdig? We onderzoeken eigenschappen van een valuatie V met $V \models \{p \to q, \neg q \vee (p \leftrightarrow r), (r \wedge \neg p) \to \neg q, p\}$. Dus onder andere (om met de makkelijkste te beginnen): $V \models p$. Tevens $V \models p \to q$. Met sem$\to$: $V \models q$. Vervolgens $V \models \neg q \vee (p \leftrightarrow r)$. Omdat tevens $V \models q$, volgt met sem$\vee$: $V \models p \leftrightarrow r$. En omdat $V \models p$, volgt met sem$\leftrightarrow$: $V \models r$. Tenslotte moeten we nog uitzoeken of $V \models (r \wedge \neg p) \to \neg q$. Omdat $V \models p$ volgt met sem$\neg$ en sem$\wedge$ dat $V \not\models (r \wedge \neg p)$ en met sem$\to$ dat $V \models (r \wedge \neg p) \to \neg q$. Dus de valuatie V die de atomen p, q en r waar maakt, maakt de hele verzameling formules waar. We hebben een valuatie gevonden die alle formules waar maakt en de verzameling is daarom vervulbaar.

iv. Toon aan dat de verzameling $\{p \wedge q, r \vee \neg q, \neg r \leftrightarrow p\}$ strijdig is. Stel dat deze verzameling vervulbaar is. Dan is er een valuatie V zodat $V \models \{p \wedge q, r \vee \neg q, \neg r \leftrightarrow p\}$. Dus $V \models p$ en $V \models q$ (met sem$\wedge$ uit de eerste formule). Tevens $V \models r \vee \neg q$. Omdat $V \models q$, volgt met sem$\vee$: $V \models r$. Aangezien $V \models p$ en $V \models r$, volgt met sem$\neg$ en sem$\leftrightarrow$ dat $V \not\models \neg r \leftrightarrow p$. Het is dus niet mogelijk om een valuatie V te vinden die alle formules waar maakt: de verzameling is strijdig.

Tenslotte twee eenvoudige stellingen over deze begrippen:

STELLING 3.3. *i.* Γ *is vervulbaar desda* $\Gamma \not\models \bot$.

ii. Γ *is strijdig desda* $\Gamma \models \bot$.

BEWIJS. We bewijzen alleen (ii).

"$\Rightarrow$": Stel dat Γ strijdig is. We moeten laten zien dat, voor alle V, als $V \models \Gamma$, dan $V \models \bot$. Dit laatste is waar omdat er wegens de strijdigheid van Γ geen V's zijn die Γ waar maken.

"$\Leftarrow$": Stel $\Gamma \models \bot$. Als er een V zou zijn met $V \models \Gamma$, dan zou $V \models \bot$, maar dit laatste is wegens sem$\bot$ onmogelijk. Dus Γ is strijdig. ❑

STELLING 3.4. *i. Als $\Gamma \subseteq \Delta$ en Γ is strijdig, dan is Δ strijdig.*

ii. Als $\Gamma \subseteq \Delta$ en Δ is vervulbaar, dan is Γ vervulbaar.

BEWIJS. We bewijzen alleen (i): Stel we hebben een valuatie V met $V \models \Delta$. Dit betekent dat V alle elementen van Δ waar maakt. Aangezien Γ een deelverzameling is van Δ, volgt dat V ook alle elementen van Γ waar maakt. Maar dit is onmogelijk aangezien Γ strijdig is. Onze veronderstelling dat $V \models \Delta$ kan dus niet waar zijn. Er is dus geen V met $V \models \Delta$. M.a.w., Δ is strijdig. ❑

Breng zelf onder woorden wat de twee clausules van deze stelling in het dagelijks leven betekenen. Kan een verdachte die zichzelf tegengesproken heeft zich nog redden door meer te zeggen?

geldigheid
ongeldigheid
redenering

3.2. Geldigheid/ongeldigheid. De begrippen geldig en ongeldig hebben betrekking op redeneringen. Tot dusver hebben we echter weten te vermijden over redeneringen te spreken. Aangezien redeneringen bij uitstek het object van de logica zijn, zullen we nu toch wat aan dit gemis moeten doen.

Redeneringen zijn eigenlijk altijd 'verhaaltjes' met een overeenkomstige vorm. Een 'prototypische' redenering ziet er als volgt uit:

Als het morgen regent, ga ik niet naar het strand; het KNMI zegt dat het morgen droog zal zijn; het KNMI heeft altijd ongelijk; dus ik ga niet naar het strand.

conclusie

premisse
hypothese

We kunnen een aantal verschillende delen aan zo'n redenering onderscheiden. Ten eerste heeft een redenering een conclusie (dat lijkt toch wel voor de hand liggend) —in bovenstaand voorbeeld is dat 'dus ik ga niet naar het strand'. Deze conclusie wordt getrokken op basis van het daaraan voorafgaande: 'als het morgen regent ga ik niet naar het strand; het KNMI zegt dat het morgen droog zal zijn; het KNMI heeft altijd ongelijk'. Deze drie proposities noemen we de premissen of hypothesen (vooronderstellingen) van de redenering. Op basis van deze premissen wordt de conclusie getrokken —waarbij we er van uitgaan dat de premissen correct zijn! Iedere redenering heeft deze vorm: er is een verzameling premissen en er is een conclusie die (als het goed is) uit de premissen volgt (wat de preciese formele inhoud is van 'uit de premissen volgen' zullen we dadelijk zien). Een ander voorbeeld:

Als de draak wordt gedood, viert Darfikollig feest; de draak wordt gedood; dus Darfikollig viert feest.

De premissen zijn hier 'als de draak wordt gedood, viert Darfikollig feest' en 'de draak wordt gedood', terwijl de conclusie is 'Darfikollig viert feest'. Kijk nu eens naar de volgende paar voorbeelden:

Als het regent ga ik niet naar het strand; het regent; dus ik ga niet naar het strand.

Als ik deze syllabus af heb, heb ik vakantie; ik heb deze syllabus af; dus ik heb vakantie.

Als je een syllabus schrijft word je zwaar onderbetaald; ik schrijf een syllabus; dus ik word zwaar onderbetaald.

Als het poerufbat dan grollimbert het; het poerufbat; dus het grollimbert. (zie Paragraaf 4.1)

Het zal de lezer van gemiddelde intelligentie niet ontgaan dat al deze voorbeelden erg op elkaar lijken. Zoals we in het begin van Paragraaf 4.1 al opmerkten zijn we geïnteresseerd in de vorm van redeneringen en niet zozeer in de concrete inhoud van de samenstellende proposities. Het is de vorm die bepaalt of een redenering geldig is of niet. Bovenstaande voorbeelden hebben allen de schematische vorm 'als p dan q; p; dus q'. We noemen dit dan ook een redeneerschema. Door in zo'n schema de propositieletters te vervangen door concrete proposities krijgen we weer een 'gewone' redenering. Een redeneerschema valt wel een beetje te vergelijken met een 'rekenschema' als $x \cdot (y+1) = x \cdot y + x$. Als we voor x en y willekeurige getallen invullen krijgen we een 'gewone' rekenkundige uitspraak: $12345 \cdot (67890 + 1) = 12345.67890 + 12345$ (of $1 \cdot (1+1) = 1 \cdot 1 + 1$).

redeneerschema

Dergelijke redeneerschemas zullen we in de taal van de logica opschrijven. Dit doen we door gewoon de verschillende premissen en de conclusie te vertalen, waarna we de premissen van de conclusie scheiden door een schuine streep. Al de bovenstaande voorbeelden worden dus naar hetzelfde redeneerschema vertaald: $p \to q, p/q$ (als p dan q en p, dus q). Het zal intuïtief wel duidelijk zijn dat dit een geldig schema is. Dit heeft tot gevolg dat alle redeneringen die je met dit schema kunt maken ook geldig zijn. Dus ook als je voor p en q de meest onwaarschijnlijke flauwekul invult krijg je een geldige redenering. Bedenk je dat de geldigheid van een redenering of redeneerschema dus nog niets zegt over de waarheid van de verschillende proposities: in het tweede voorbeeld (als ik deze syllabus af heb, heb ik vakantie; ik heb deze syllabus af; dus ik heb vakantie) zit een onware propositie (ik heb deze syllabus af), maar dat doet niets af aan de geldigheid van de redenering: als het zo is dat 'als ik deze syllabus af heb, ik vakantie heb' en als het zo is dat ik deze syllabus af heb, dan is het ook zo dat ik vakantie heb. Voor de geldigheid van de redenering is het helemaal niet nodig dat het waar is dat ik vakantie heb als ik deze syllabus af heb, of dat ik deze syllabus daadwerkelijk af heb. Dit wordt nog duidelijker als we naar het laatste voorbeeld kijken: 'als het poerufbat dan grollimbert het; het poerufbat; dus het grollimbert'. Wie kan mij zeggen of het waar is dat het poerufbat? —of dat het grollimbert als het poerufbat? Toch kunnen we zeggen dat deze redenering geldig is—omdat het bijbehorende redeneerschema geldig is.

Een redeneerschema heeft dus altijd de vorm $A_1, \ldots, A_n/B$, waarbij A_1 tot en met A_n de premissen zijn en B de conclusie is. Met de ons bekende verzamelingennotatie kunnen we een redenering in z'n algemeenheid dus nog compacter schrijven: Γ/A, waar Γ de verzameling premissen is en A de conclusie. Laten we naar de formele definitie van geldigheid en ongeldigheid kijken.

geldigheid

ongeldigheid

DEFINITIE 3.5. Een redeneerschema Γ/A is geldig desda $\Gamma \models A$. ❑

DEFINITIE 3.6. Een redeneerschema Γ/A is ongeldig desda het niet geldig is. ❑

Oftewel: Een redeneerschema Γ/A is ongeldig desda er een valuatie V is zodat $V \models \Gamma$ en $V \not\models A$.

Volgens Definitie 3.5 is een redeneerschema Γ/A dus geldig als voor alle valuaties V: $V \models \Gamma \Rightarrow V \models A$. Of: iedere valuatie die de premissen waar maakt, maakt ook de conclusie waar. Of: altijd als alle premissen waar zijn, dan is ook de conclusie waar. Zoals we hierboven al zagen is het dus helemaal niet noodzakelijk dat de premissen waar zijn. Het gaat er alleen om, dat *als* de premissen waar zijn, dat dan ook de conclusie waar is.

Een merkwaardig gevolg van deze definitie is dat als de premissen nooit waar zijn, de redenering dan per definitie geldig is. Het volgende redeneerschema is dus geldig; $p, \neg p/q$. Er is namelijk geen valuatie V die zowel p als $\neg p$ waar maakt, dus altijd als p en $\neg p$ worden waar gemaakt, wordt ook q waar gemaakt. Het merkwaardige is natuurlijk dat q helemaal niets met p te maken hoeft te hebben: 'je leest nu Hoofdstuk 7, je leest nu niet Hoofdstuk 7 / morgen valt de bom'. Nogmaals (het kan niet vaak genoeg gezegd worden): dat een redenering geldig is, wil niet zeggen dat de conclusie of de premissen waar zijn. Dit fenomeen is niets anders dan de 'meta-uitvoering' van het al in paragraaf 4.1 ter sprake gekomen 'ex falso' principe: uit het onware volgt alles.

Tenslotte: bedenk dat het voldoende noch noodzakelijk is, om een valuatie te vinden die zowel premissen als conclusie waar maakt: dat zegt niets over de geldigheid van de redenering. Als je zo'n valuatie vindt kun je hooguit zeggen dat $\Gamma \cup \{A\}$ een vervulbare verzameling is. Een redeneerschema is geldig als altijd als de premissen waar zijn ook de conclusie waar is. Het moet dus 'goed gaan' voor alle valuaties. Gelukkig zul je nooit werkelijk alle valuaties hoeven te beschouwen: alleen de valuaties die Γ waar maken zijn van belang (alweer door het ex falso principe: $V \models \Gamma \Rightarrow V \models A$ is automatisch het geval indien $V \not\models \Gamma$).

Definitie 3.6 spreekt nu een beetje voor zichzelf: een redenering is ongeldig als zij niet geldig is (!! echt waar). Oftewel: het is niet zo dat altijd als de premissen worden waar gemaakt, ook de conclusie wordt waargemaakt. Oftewel: er is een valuatie die de premissen waar maakt, maar die de conclusie niet waar maakt. Zo'n valuatie noemen we een tegenvoorbeeld.

tegenvoorbeeld

Alweer een paar voorbeelden:

i. $p, p \to q/q$ is een geldige redenering: iedere valuatie die de premissen waar maakt, moet p en $p \to q$ waar maken. Als $V \models p$ en $V \models p \to q$, dan volgt met sem$\to$ dat $V \models q$. Dus iedere valuatie die de premissen waar maakt, maakt ook de conclusie waar. Ergo, de redenering is geldig, oftewel:$p, p \to q \models q$.

ii. Is $(p \vee q) \to r, \neg r/(\neg p \wedge \neg q)$ een geldige redenering? Als dit zo is, dan moet dus iedere valuatie V die de premissen waar maakt de conclusie waar maken. Stel dat V een valuatie is die de premissen waar maakt. Dus $V \models (p \vee q) \to r$ (*) en $V \models \neg r$ (**). Uit (**) met sem$\neg$: $V \not\models$ r. Hieruit, samen met (*), met sem$\to$: $V \not\models p \vee q$. Vervolgens met sem$\vee$: $V \not\models p$ en $V \not\models q$. Dus (met sem$\neg$) $V \models \neg p$'/ en $V \models \neg q$. Tenslotte met sem$\wedge$: $V \models \neg p \wedge \neg q$. Inderdaad hebben wij hier dus te maken met een geldige redenering.

iii. Is de volgende redenering geldig: $p \to (q \wedge r), (\neg q \vee r)/(p \wedge r)$? Als de redenering niet geldig is, moet er een valuatie zijn die de premissen wel en de conclusie niet waar maakt. Laat V zo'n valuatie zijn. Er moet nu gelden: $V \models p \to (q \wedge r)$, $V \models \neg q \vee r$, $V \not\models p \wedge r$. Uit $V \models \neg q \vee r$ volgt met sem$\vee$ dat $V \models \neg q$ of $V \models r$.

We hebben dus twee opties. Laten we beginnen met te kijken wat er gebeurt als $V \models \neg q$.

Optie 1: stel $V \models \neg q$. Dan (sem$\neg$): $V \not\models q$ en met sem$\wedge$: $V \not\models q \wedge r$. Omdat tevens $V \models p \rightarrow (q \wedge r)$ volgt met sem$\rightarrow$: $V \not\models p$. Weer met sem$\wedge$: $V \not\models p \wedge r$. Het is ons gelukt om een valuatie te vinden die de premissen wel waar maakt en de conclusie onwaar maakt. Dus de redenering is niet geldig, of: $p \rightarrow (q \wedge r)$, $(\neg q \vee r) \not\models (p \wedge r)$. Merk op dat we de tweede optie die we hadden, te weten $(V \models r)$, helemaal niet hebben hoeven beschouwen. Merk tevens op dat de verzameling $\{p \rightarrow (q \wedge r), (\neg q \vee r), (p \wedge r)\}$ wel vervulbaar is: neem V zodat $V \models p$, $V \models q$, $V \models r$. Het is dus wel mogelijk om premissen en conclusie gelijktijdig waar te maken (dit nogmaals ter illustratie van het verschil tussen geldige redeneringen en vervulbare verzamelingen).

We kunnen nu een stelling produceren over redeneringen en verzamelingen:

STELLING 3.7. $\Gamma \models B \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \cup \{\neg B\}$ *is strijdig*

BEWIJS. We moeten de $\Leftrightarrow$ twee kanten op bewijzen—v.l.n.r en v.r.n.l.:

$\Rightarrow$: Zij gegeven $\Gamma \models B$. Zij V een valuatie, zodat $V \models \Gamma \cup \{\neg B\}$. Dan volgt dat $V \models \Gamma$ en $V \models \neg B$, en dus $V \not\models B$. Anderzijds, omdat $V \models \Gamma$ en $\Gamma \models B$, volgt dat $V \models B$. Een tegenspraak. Dus er is geen V met $V \models \Gamma \cup \{B\}$, m.a.w. $\Gamma \cup \{\neg B\}$ is strijdig.

$\Leftarrow$: Gegeven $\Gamma \cup \{\neg B\}$ is strijdig. Stel dat $V \models \Gamma$. Wegens de strijdigheid van de verzameling moet nu $V \not\models \neg B$. Dus $V \models B$. Dus iedere valuatie die Γ waar maakt, maakt tevens B waar. Oftewel: $\Gamma \models B$. ❑

3.3. Tautologieën en contradicties. Veel formules zijn soms waar, soms onwaar, afhankelijk van de beschouwde valuatie. Zo is de formule 'p' waar voor alle valuaties V waarvoor $V \models p$ en onwaar voor alle valuaties V waarvoor $V \not\models p$ (uiteraard). De formule $p \wedge q$ is waar voor alle valuaties V met $V \models p$ en $V \models q$ en onwaar voor alle valuaties V met $V \not\models p$ of $V \not\models q$, etc. Er zijn echter formules die altijd waar zijn, ongeacht de beschouwde valuatie. In Paragraaf 7.1 en 7.2 zijn we al zo'n formule tegengekomen: $p \vee \neg p$ (zie o.a. Paragraaf 7.1 voorbeeld (iv)). Voor iedere valuatie V geldt dus dat $V \models p \vee \neg p$. Een dergelijke formule noemen we een tautologie. tautologie

DEFINITIE 3.8. Een formule A is een tautologie desda voor alle valuaties V geldt dat $V \models A$. M.a.w., A is een tautologie als $\models A$. ❑

Als een formule A geen tautologie is kunnen we analoog schrijven: $\not\models A$ (d.w.z.: het is niet zo dat voor alle valuaties V: $V \models A$, oftewel: er is minstens één valuatie V zodat $V \not\models A$). Nog een paar voorbeelden van tautologieën:

i. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ is een tautologie. Als deze formule geen tautologie is, wordt zij niet door iedere valuatie waar gemaakt, dus moet er een valuatie V zijn zodat $V \not\models (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$. Dan (sem$\vee$): $V \not\models (p \rightarrow q)$ en $V \not\models (q \rightarrow p)$. Twee keer sem$\rightarrow$ toepassen: $V \models p$, $V \not\models$ q, $V \models q$ en $V \not\models$ p. We hebben nu een hok vol tegenspraken: zo'n valuatie kan blijkbaar niet bestaan, dus iedere valuatie maakt deze formule waar: het is een tautologie.

ii. $\neg(p \wedge \neg p)$ is een tautologie. Voor iedere valuatie geldt dat $V \models p$ en $V \not\models \neg p$ of $V \not\models p$ en $V \models \neg p$. Dus (met sem$\wedge$) voor iedere valuatie: $V \not\models (p \wedge \neg p)$ en met sem$\neg$: $V \models \neg(p \wedge \neg p)$. Ergo: $\models \neg(p \wedge \neg p)$.

iii. De volgende formules zijn tautologieën (ga dit na):

a. $p \to p$,

b. $(p \wedge q) \to p$,

c. $p \to (p \vee q)$,

d. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$,

e. $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$,

f. $q \to (p \vee \neg p)$,

g. $(p \wedge \neg p) \to q$,

h. $p \to (q \to p)$

i. etc, ...

Dat een formule altijd waar is, ongeacht de valuatie, betekent dat het niet uitmaakt welke waarheidswaarden we aan de afzonderlijke atomen toekennen —de hele formule zal altijd waar zijn. Als we nog even aan de waarheidstafels denken, dan betekent dit dus dat de waarheidstafel voor een tautologie in de laatste kolom altijd uitsluitend enen zal bevatten. Kijk bijvoorbeeld naar onderstaande waarheidstafel voor $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$:

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

Awel... Als er formules bestaan die altijd waar zijn, dan zullen er vast ook wel formules bestaan die... (guess what?) altijd onwaar zijn. En jawel! Dit zijn dus formules die door geen enkele valuatie worden waar gemaakt —ze 'kunnen niet'.

contradicties

Dergelijke formules noemen we contradicties. En op z'n 'officieels':

Definitie 3.9. Een formule A is een contradictie desda voor alle valuaties V geldt dat $V \not\models A$. M.a.w. A is een contradictie als $\{A\}$ strijdig is. Nog anders gezegd: A is een contradictie als $A \models \perp$. ❏

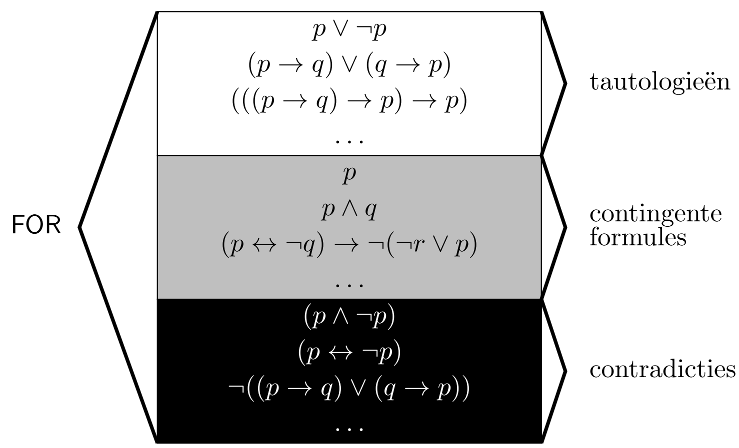
Naar analogie met de tautologieën, kunnen we ons bedenken dat in de waarheidstafel van een contradictie in de laatste kolom altijd uitsluitend nullen zullen staan: de formule is altijd onwaar, ongeacht de waarheidswaarden van de diverse atomen. Een grote groep contradicties hebben we zo voor het oprapen: de negaties van de tautologieën. Als een formule A altijd waar is, ongeacht de valuatie van de atomen (dus een tautologie), dan zal (volgens sem$\neg$) $\neg A$ altijd onwaar zijn —dus een contradictie. Ook andersom: als A altijd onwaar is, dus een contradictie, dan zal $\neg A$

altijd waar zijn, dus een tautologie. Wie voorbeelden van contradicties wil zien, kan dus voor de formules uit bovenstaande voorbeelden een $\neg$ zetten.

Bega nu niet de vergissing om te denken dat iedere formules hetzij een tautologie, hetzij een contradictie is. Tautologieën zijn altijd waar en contradicties altijd onwaar, maar er zijn natuurlijk ook formules (de meeste), die soms waar, soms onwaar zijn. In de waarheidstafel staan er dan zowel enen als nullen. Zulke formules noemen we contingent. contingent

DEFINITIE 3.10. Een formule A is contingent desda er minstens één valuatie V is zodat $V \not\models A$ en er minstens één valuatie V' is zodat $V' \models A$. ❑

Aangezien iedere formule hetzij altijd waar, hetzij soms waar, soms onwaar, hetzij altijd onwaar is, is iedere formule hetzij een tautologie, hetzij een contingente formule, hetzij een contradictie: de verzameling FOR van formules van de propositielogica wordt door deze drie begrippen keurig in drie stukken verdeeld (waarbij de verzameling tautologieën precies even groot is als de verzameling contradicties (waarom?)).



FIGUUR 1. De verzameling FOR gepartitioneerd

Het is weer tijd voor een stelling.

STELLING 3.11. $\Gamma, A \models B$ *desda* $\Gamma \models A \to B$

BEWIJS. $\Rightarrow$: Zij gegeven: (*) $\Gamma, A \models B$. Dit betekent volgens Definitie 2.2 dat voor alle valuaties V geldt: als $V \models \Gamma \cup \{A\}$, dan $V \models B$. Te bewijzen: $\Gamma \models A \to B$. M.a.w. (Definitie 2.2) voor alle valuaties V met $V \models \Gamma$ moet gelden $V \models A \to B$.

Bezie V zodat $V \models \Gamma$. Er zijn nu twee mogelijkheden. Als $V \models A$, dan geldt ook $V \models \Gamma \cup \{A\}$ en dus volgens (*) dat $V \models B$. Uit $V \models B$ kunnen we met sem$\to$ concluderen dat $V \models A \to B$. Als $V \not\models A$, dan geldt onmiddelijk met sem$\to$ dat$V \models A \to B$.

$\Leftarrow$: Zij gegeven (**) $\Gamma \models A \to B$. Dit betekent volgens Definitie 2.2 dat voor alle valuaties V geldt: als $V \models \Gamma$, dan $V \models A \to B$. Te bewijzen: $\Gamma, A \models B$. M.a.w.

(Definitie 2.2) voor alle valuaties V met $V \models \Gamma \cup \{A\}$ moet gelden $V \models B$. Stel we hebben een V met $V \models \Gamma \cup \{A\}$. Dan geldt zeker dat $V \models \Gamma$, en dus volgens (**) dat $V \models A \to B$. Met sem$\to$ volgt hieruit $V \not\models A$ of $V \models B$. Nu hadden we al aangenomen dat $V \models A$ dus $V \models B$. ❑

Dit betekent dat we met onze huidige semantiek hypothesen naar de andere kant van de dubbele turnstile mogen halen, met toevoeging van een implicatie. Andersom mogen we het antecedent van een implicatie in de conclusie weghalen en toevoegen aan de hypothesen. Het gevolg hiervan is dat we ieder geldig redeneerschema makkelijk kunnen 'ombouwen' tot een tautologie. Neem bijvoorbeeld de redenering $A, B, C \models D$. We passen nu bovenstaande stelling drie keer toe:

$$\begin{aligned} A, B, C \models D \quad &\Leftrightarrow \quad A, B \models C \to D \\ &\Leftrightarrow \quad A \models B \to (C \to D) \\ &\Leftrightarrow \quad \models A \to (B \to (C \to D)) \end{aligned}$$

... en deze laatste is een tautologie (mooi vak, hè?).

3.4. Equivalentie en substitutie. In Paragraaf 4.1 hebben we kennisgemaakt met de dubbele pijl ook wel 'bi-implicatie'. Hiervoor geldt dat $V(A \leftrightarrow B) = 1$ desda $V(A) = V(B)$, oftewel binnen een gegeven valuatie is $A \leftrightarrow B$ waar als A en B dezelfde waarheidswaarde hebben.

equivalentie

Nu is het interessant om te kijken naar de situatie dat A en B dezelfde waarheidswaarde hebben onafhankelijk van de valuatie. Dit begrip heet equivalentie of logische equivalentie: A en B hebben altijd dezelfde waarheidswaarde. Als voor alle V: V(A) = V(B), dan dus ook voor alle V: $V(A \leftrightarrow B) = 1$, oftewel $A \leftrightarrow B$ is een tautologie. Omdat dit equivalentiebegrip zo'n belangrijke rol speelt in de logica, is er een aparte notatie voor:

Eq

Notatie: Als voor alle valuaties V: $V(A) = V(B)$, dan schrijven we ook wel A Eq B. De formule $A \leftrightarrow B$ is dan (per definitie van de $\leftrightarrow$) een tautologie.

Voorbeeld:

i. $(p \to q)$ Eq $(\neg p \vee q)$. Voor alle valuaties V geldt dat als $V \models (p \to q)$ dan $V \not\models p$ of $V \models q$ (sem$\to$). Oftewel: $V \models \neg p$ of $V \models q$ (sem$\neg$). Dus $V \models (\neg p \vee q)$ (sem$\vee$).

   En andersom: als $V \models (\neg p \vee q)$ dan $V \models \neg p$ of $V \models q$ (sem$\vee$), oftewel $V \not\models p$ of $V \models q$ (sem$\neg$). Met sem$\to$: $V \models (p \to q)$.

   In Subparagraaf 7.3.3 voorbeeld (iii) hebben we ook al gezien dat $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ een tautologie is, dus dat klopt wel. Merk overigens op dat het nodig is om een equivalentie twee kanten op te bewijzen: A Eq B betekent dat als A waar is, B ook waar is en dat als B waar is, A ook waar is.

ii. Alle tautologieën zijn equivalent aan elkaar (waarom?). Hetzelfde geldt voor alle contradicties.

iii. Geen twee verschillende atomen zijn equivalent.

In de volgende stelling sommen we een aantal belangrijke equivalenties van de propositie logica op.

STELLING 3.12. *We hebben:*

I. $(A \wedge \bot)$ Eq $\bot$

II. $(A \vee \bot)$ Eq A

III. $(A \wedge \neg\bot)$ Eq A

IV. $(A \vee \neg\bot)$ Eq $\neg\bot$

V. $(A \wedge A)$ Eq A *idempotentie van de* $\wedge$

VI. $(A \vee A)$ Eq A *idempotentie van de* $\vee$

VII. $(A \wedge B)$ Eq $(B \wedge A)$ *commutativiteit van de* $\wedge$

VIII. $(A \vee B)$ Eq $(B \vee A)$ *commutativiteit van de* $\vee$

IX. $(A \wedge B) \wedge C$ Eq $A \wedge (B \wedge C)$ *associativiteit van de* $\wedge$

X. $(A \vee B) \vee C$ Eq $A \vee (B \vee C)$ *associativiteit van de* $\vee$

XI. $A \wedge (B \vee C)$ Eq $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ *distributiviteit van de* $\wedge$ *over de* $\vee$

XII. $A \vee (B \wedge C)$ Eq $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ *distributiviteit van de* $\vee$ *over de* $\wedge$

XIII. $\neg\neg A$ Eq A *dubbele negatie eliminatie*

XIV. $\neg(A \wedge B)$ Eq $\neg A \vee \neg B$ *een wet van de Morgan* wetten van de Morgan

XV. $\neg(A \vee B)$ Eq $\neg A \wedge \neg B$ *een andere wet van de Morgan*

XVI. $\neg A$ Eq $A \to \bot$

XVII. $(A \to B)$ Eq $(\neg A \vee B)$

XVIII. $\neg(A \to B)$ Eq $(A \wedge \neg B)$

XIX. $(A \leftrightarrow B)$ Eq $((A \to B) \wedge (B \to A))$

XX. $(A \leftrightarrow B)$ Eq $((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$

XXI. $(A \to B)$ Eq $(\neg B \to \neg A)$ *contrapositie*

XXII. $(A \to (B \to C))$ Eq $((A \wedge B) \to C)$

XXIII. $(A \to (B \to C))$ Eq $(B \to (A \to C))$

De distributiewetten lijken op zekere wetten van plus en maal. Vervang maar eens de letters door getallen, de $\wedge$ door $\cdot$ (maal) en de $\vee$ door $+ \ldots$ Vanwege de associativiteits-regels laten we bij een hele rij $\wedge$-en of $\vee$-en vaak de haakjes weg. We schrijven dus bijvoorbeeld $A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E \wedge F$ in plaats van $(((A \wedge ((B \wedge C) \wedge D)) \wedge E) \wedge F)$. Ga voor de oefening na dat bovenstaande equivalenties inderdaad equivalenties zijn. Je hoeft natuurlijk niet alles na te rekenen: vaak is wel vrij direkt in te zien dat een equivalentie geldig is.

Het is wel handig om veel van deze equivalenties (en formules in het algemeen) niet als uitsluitend abstracte objecten te zien, maar ze te lezen 'alsof het ergens over gaat'. Neem bijvoorbeeld $(A \leftrightarrow B)$ Eq $((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$. Dat moet je niet lezen als 'A dubbele pijl B equivalent met A en B of niet A en niet B' —op zo'n manier weet je al snel niet meer waar je het over hebt. Lees het liever als 'A bi-impliceert B betekent dat je ze allebei hebt, of dat je ze geen van beide hebt'. Net zo met de tautologie $(p \wedge q) \to p$: 'als je p en q hebt dan heb je ook p'. En met de equivalentie $\neg(A \wedge B)$ Eq $(\neg A \vee \neg B)$: 'als je niet (A en B) hebt, dan heb je één van beide niet en andersom'. Enzovoorts. Uiteraard is dit ook niet meer dan een wellicht nuttige suggestie —er zijn altijd mensen die meer kunnen met iets als 'als p dan niet q of r dubbele pijl niet p of niet q of r' (vaak mensen die al wat langer aan logica doen en daar een speciale hersenkwab voor ontwikkeld hebben, of mensen die syllabi schrijven bijvoorbeeld).

Als twee formules A en B equivalent zijn, dan zijn ze dus, wat betreft hun waarheidswaarden, uitwisselbaar. En aangezien we in de propositielogica hoofdzakelijk geïnteresseerd zijn in de waarheidswaarden van proposities zouden we het vermoeden kunnen hebben dat als we een formule C hebben, waarin de propositieletter p voorkomt, het dan niet uitmaakt of we die p door A of door B vervangen. Dit vermoeden is geheel correct en staat bekend als de zogenaamde substitutiestelling. Voor we deze netjes kunnen formuleren, hebben we een substitutienotatie nodig:

substitutiestelling

Definitie 3.13. De formule $A[p := B]$ is de formule die ontstaat door in de formule A alle voorkomens van de propositieletter p te vervangen door de formule B. NB. lees de ':=' als 'wordt', dus '$A[p := B]$' ongeveer als 'A, met p wordt B'. ❑

Merk op dat $(\cdot)[p := B]$ een operatie op formules is.

Voorbeeld:

- Als $A = ((p \to q) \vee \neg p)$ en $B = (\neg q \wedge p)$ dan is:
  $A[p := B] = (((\neg q \wedge p) \to q) \vee \neg(\neg q \wedge p))$,
  $A[q := B] = ((p \to (\neg q \wedge p)) \vee \neg p)$,
  $B[p := A] = (\neg q \wedge ((p \to q) \vee \neg p))$,
  $B[q := A] = (\neg((p \to q) \vee \neg p) \wedge p)$

Ons bovenstaande vermoeden kunnen we nu fatsoenlijk opschrijven:

Stelling 3.14. *Substitutiestelling.*

i. $V(A) = V(B) \Rightarrow V(C[p := A]) = V(C[p := B])$

ii. $A \leftrightarrow B \models C[p := A] \leftrightarrow C[p := B]$

iii. $\models A \leftrightarrow B \Rightarrow \models C[p := A] \leftrightarrow C[p := B]$

Bewijs. We laten eerst zien dat (i) $\Rightarrow$ (ii) en (ii) $\Rightarrow$ (iii). We hoeven dan alleen nog (i) te bewijzen.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Dat $A \leftrightarrow B \models C[p := A] \leftrightarrow C[p := B]$ betekent (volgens Definitie 2.2): voor alle V, $V \models A \leftrightarrow B \Rightarrow V \models C[p := A] \leftrightarrow C[p := B]$.

Dus te bewijzen: als $V \models A \leftrightarrow B$ dan $V \models C[p := A] \leftrightarrow C[p := B]$, voor willekeurige V.

Zij V gegeven zodat $V \models A \leftrightarrow B$. Dan volgt met sem$\leftrightarrow$ dat $V(A) = V(B)$. Nu kunnen we gebruik maken van (i) en volgt $V(C[p := A]) = V(C[p := B])$. Dit nu levert met sem$\leftrightarrow$ op dat $V \models C[p := A] \leftrightarrow C[p := B]$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Volgens (ii) geldt dus dat $V \models A \leftrightarrow B \Rightarrow V \models C[p := A] \leftrightarrow C[p := B]$. Dit zegt dat als een valuatie $A \leftrightarrow B$ waar maakt, hij ook $C[p := A] \leftrightarrow C[p := B]$ waar maakt. Als dus iedere valuatie $A \leftrightarrow B$ waar maakt, dan zal ook iedere valuatie $C[p := A] \leftrightarrow C[p := B]$ waar maken. M.a.w.:

$$\models A \leftrightarrow B \quad \Rightarrow \quad \models C[p := A] \leftrightarrow C[p := B].$$

Bewijs van (i): Als $V(A) = V(B)$ voor zekere V, dan zal, in de rij die bij deze valuatie V hoort, de laatste kolom van de waarheidstafel voor A (d.i. de kolom onder de formule A zelf) identiek zijn aan de laatste kolom van de waarheidstafel voor B. We maken nu een waarheidstafel voor $C[p := A]$. Ergens in deze waarheidstafel komt A aan de beurt. (Aannemende dat p wel echt voorkomt in C.)

	$\ldots\ldots$	A	$\ldots$	$C[p := A]$
		1		0
		1		0
V		0		0
		1		1

Omdat iedere kolom wordt uitgerekend met behulp van voorgaande kolommen, kan A dus rechts van zichzelf willekeurig vaak gebruikt worden. Bij de berekening worden alleen de nullen en enen onder A gebruikt. We vervangen nu overal A door B. Aan de kolom onder A (nu dus B) verandert niets omdat $V(A) = V(B)$. Het is mogelijk dat we nog iets aan de waarheidstafel moeten veranderen, omdat de onderdelen waaruit B bestaat niet links van A hoeven te staan. We voegen ze dan gewoon toe (we kunnen ook, om het onszelf makkelijk te maken, de kolom van A vervangen door de hele waarheidstafel van B).

	$\ldots\ldots$	$\overbrace{* * *}^{\text{nieuw}}$	B	$\ldots$	$C[p := B]$
			0		?
			1		?
V			0		?
			0		?

De kolommen rechts van B veranderen niet, omdat de oude berekening ‘gewoon door gaat’. Populair gezegd: de kolommen rechts van B hebben onder de streep geen verandering kunnen zien. Maar dan is de kolom onder $C[p := B]$ ook hetzelfde als de kolom onder $C[p := A]$. Dus $V(C[p := A]) = V(C[p := B])$. ❑

Eigenlijk hebben we nu meteen (iii) bewezen (wie had dat in de gaten?). Om (i) te bewijzen hebben we ons beperkt tot één rij van de waarheidstafel: de uitspraak

'$V(A) = V(B) \Rightarrow V(C[p := A]) = V(C[p := B])$ voor alle V' zegt dat als A en B voor een bepaalde V dezelfde waarde hebben (dus op de bij V horende rij in de waarheidstafel staat hetzelfde, terwijl ze op de andere rijen best kunnen verschillen), dat dan ook $C[p := A]$ en $C[p := B]$ op die rij dezelfde waarde hebben. Het is duidelijk dat als A en B altijd dezelfde waarheidswaarde hebben ($V(A) = V(B)$ voor alle V) dat dan bovenstaande redenering voor alle rijen van de waarheidstafel kan worden gehouden: als de kolom onder A identiek is aan de kolom onder B, dan zal de kolom onder $C[p := A]$ ook identiek zijn aan de kolom onder $C[p := B]$ —en dat is precies wat in (iii) staat.

4. Voegtekens: fijne puntjes

Voegtekens zijn voor de rechtgeaarde logicus een constante bron van inspiratie en vermaak. Vandaar de volgende paragrafen.

4.1. Functionele volledigheid. Als we naar ons rijtje 'standaard-equivalenties' kijken (stelling 3.12), dan zien we dat $\neg(A \wedge B)$ Eq $(\neg A \vee \neg B)$ en dus dat $(A \wedge B)$ Eq $\neg(\neg A \vee \neg B)$. We hebben ook al gezien dat $(A \to B)$ Eq $(\neg A \vee B)$. We zien dus dat we conjuncties en implicaties kunnen herschrijven naar formules die alleen $\vee$ en $\neg$ bevatten. We weten ook dat we een dubbele pijl met een conjunctie en twee implicaties kunnen schrijven. We kunnen dus iedere formule die conjuncties, implicaties en bi-implicaties bevat, schrijven als een formule die alleen disjuncties en negaties bevat! Laten we dat eens doen:

$$
\begin{array}{rcl}
\neg A & \mathsf{Eq} & \neg A \\
(A \vee B) & \mathsf{Eq} & (A \vee B) \\
(A \wedge B) & \mathsf{Eq} & \neg(\neg A \vee \neg B) \\
(A \to B) & \mathsf{Eq} & (\neg A \vee B) \\
(A \leftrightarrow B) & \mathsf{Eq} & ((A \to B) \wedge (B \to A)) \\
 & \mathsf{Eq} & ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)) \\
 & \mathsf{Eq} & \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A))
\end{array}
$$

Uiteraard wordt alles er niet leesbaarder op, maar daar gaat het nu niet om. We zien hieraan dat we eigenlijk de $\wedge$, $\to$ en $\leftrightarrow$ niet nodig hebben, maar kunnen volstaan met uitsluitend de $\vee$ en de $\neg$.

We zullen in de volgende paragraaf bewijzen dat $\{\neg, \wedge, \vee\}$ voldoende is om alle denkbare waarheidsfunctionele voegtekens te definiëren. (We gaan straks nader in op de vraag wat een *denkbaar waarheidsfunctioneel voegteken* is.) Zo'n verzameling waarmee je alle voegtekens kunt definiëren, wordt een *functioneel volledige* verzameling voegtekens genoemd. We zien dus dat, geven het feit dat $\{\neg, \wedge, \vee\}$ functioneel volledig is, ook $\{\vee, \neg\}$ functioneel volledig is. Volgens analoge overwegingen is ook $\{\wedge, \neg\}$ functioneel volledig: $(A \vee B)$ schrijven we als $\neg(\neg A \wedge \neg B)$. De formule $(A \to B)$ is equivalent met $(\neg A \vee B)$ en de disjunctie kunnen we met bovenstaande regel als een conjunctie schrijven. De dubbele pijl schrijven we als een conjunctie van twee enkele pijlen die we als disjuncties kunnen schrijven die we als conjuncties kunnen schrijven. Andere functioneel volledige verzamelingen zijn

functioneel volledig

$\{\to, \neg\}$ en $\{\to, \bot\}$.[1] De hier gegeven functioneel volledige verzamelingen zijn minimaal. Dat wil zeggen dat je als je er iets uit weg laat, de resterende verzameling niet meer functioneel volledig is (met $\{\wedge\}$ kun je niet alle voegtekens definiëren). Zo beschouwd is ook de verzameling $\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \neg\}$ van de ons ter beschikking staande voegtekens een functioneel volledige verzameling (echter uiteraard geen minimale).

Wat bedoelen we als we zeggen dat we met een verzameling voegtekens alle denkbare (waarheidsfunctionele) voegtekens kunnen definiëren? Laten we ons eerst concentreren op binaire of tweeplaatsige voegtekens. Een willekeurig binair voegteken volledig vastgelegd wordt door een waarheidstafel van de volgende vorm:

binair
tweeplaatsig

p	q	$p \# q$
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

Figuur 2. Een willekeurig binair voegteken

Hier is $\#$ een willekeurig binair voegteken en de vier vraagtekens zijn nullen en enen. Wij kennen vier binaire voegtekens, corresponderend met vier verschillende rijtjes nullen en enen, maar er zijn er natuurlijk meer mogelijk. In totaal zijn er zestien (24) binaire voegtekens mogelijk, die overeenkomen met de rijtjes 0000, 0001, 0010, 0011, ..., 1100, 1101, 1110, 1111. Het eerste voegteken heeft een kolom van alleen nullen onder zich, wat dus wil zeggen dat $V(p \# q) = 0$ voor alle V (oftewel $p \# q$ is een contradictie voor willekeurige p en q!). Het tweede rijtje (0001) komt overeen met de logische 'en': $p \# q$ is alleen waar als zowel p als q waar zijn, etc., etc., tot aan het laatste rijtje dat uit uitsluitend enen bestaat: $V(p \# q) = 1$ voor alle V, oftewel $p \# q$ is een tautologie.

We kunnen het ook zo zien: de waarheidstafel voor een binair voegteken geeft ons een *functie* van alle valuaties V op p en q naar de verzameling $\{0, 1\}$ van de waarheidswaarden. De valuaties op hun beurt zijn weer functies van $\{p, q\}$ naar de waarheidswaarden $\{0, 1\}$. Daarom zijn er $4 = 2^2$ valuaties op p en q. Dit zijn de rijtjes voor de verticale lijn in de waarheidstafel. Er zijn dus $16 = 2^4 = 2^{2^2}$.

functie

Opmerking 4.1. * Deze redenering gebruikt een elementair feit over functies: bezie verzamelingen X en Y en stel dat in X er n elementen zitten en dat in Y er m zitten. We kunnen ons de elementen laat de elementen van X zijn: $x_1, \ldots, x_n$ en de van Y: $y_1, \ldots y_m$. Voor functies van X naar Y zijn er de volgende onafhankelijke mogelijkheden. We kunnen aan x_1 de waarden $y_1, \ldots y_m$ toekennen, aan x_2 idem, enzovoorts. We hebben dus n keer m onafhankelijke keuzen. De hoeveelheid keuzen is dus:

$$m^n = \overbrace{m \times \ldots \times m}^{n\times}.$$

In de verzamelingenleer wordt dit inzicht nog gegeneraliseerd naar oneindige verzamelingen. ❏

[1] De constante $\bot$ kan opgevat worden als een nul-plaatsig voegteken.

Net als er tweeplaatsige voegtekens zijn, hebben we ook drie-, vier- en meerplaatsige voegtekens. Een tweeplaatsig voegteken 'werkt' op twee proposities. Net zo is een drieplaatsig of ternair voegteken een operatie op drie proposities, zeg p, q, r, etc. De valuaties op $\{p, q, r\}$, zijn functies van $\{p, q, r\}$ naar $\{0, 1\}$. Dat zijn er dus $2^3 = 8$. De mogelijke ternaire voegtekens zijn functies van deze valuaties naar $\{0, 1\}$. Dat zij er dus $256 = 2^{2^3}$. Op de zelfde manier zijn er $65536 = 2^{2^4}$ vierplaatsige of quaternaire voegtekens. In het algemeen zijn er 2^{2^n} n-plaatsige voegtekens.

drieplaatsig
ternair
vierplaatsig
quaternair

Opmerking 4.2. * De formule die ons vertelt dat er 2^{2^n} n-aire voegtekens zijn, werkt zelfs voor $n = 0$ en $n = 1$. Er is één ($= 2^0$) valuatie op geen atomen: de lege valuatie. Dat geeft ons $2 = 2^{2^0}$ nul-plaatsige voegtekens. Te weten $\bot$ en $\top$. Er zijn 2 ($= 2^1$) valuaties of p. Dat geeft ons $4 = 2^{2^1}$ eenplaatsige of unaire voegtekens. Dit zijn het voegteken dat ons constant 0 geeft, het voegteken dat ons constant 1 geeft, de identiteit die we kunnen schrijven als de formule p, en negatie die we kunnen schrijven als $\neg p$. ❑

eenplaatsig
unair

Er is iets raars aan de hand: als we, bijvoorbeeld de binaire voegtekens bekijken, komen de nul-aire en de unaire daarin weer terug. Bekijk bijvoorbeeld het volgende binaire voegteken.

p	q	$p \# q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Figuur 3. De negatie als binair voegteken

Als je goed kijkt zie je dat de waarheidswaarde van $p \# q$ uitsluitend afhankelijk is van de waarheidswaarde van p: als p onwaar is, is $p \# q$ onwaar en andersom, ongeacht de waarheidswaarde van q. De werking van dit binaire voegteken komt dus precies overeen met die van de unaire $\neg$! We noemen zo'n variabele als q die in dit voorbeeld alleen voor spek en bonen meedoet een dummy variabele. Om het allemaal nog gekker te maken is er nog een tweede binaire negatie waarin nu p de dummy is.

dummy variabele

Je moet het zo zien: het is in zekere zin een keuze hoeveel plaatsig een voegteken is. Als we een taal met n variabelen kiezen, kunnen we alle $\leq n$-plaatsige voegtekens als n-plaatsige zien.

Functionele volledigheid heeft betrekking op in principe alle voegtekens:

Definitie 4.3. Een verzameling logische voegtekens is functioneel volledig als je er alle mogelijke logische voegtekens mee kunt maken. ❑

In de volgende paragraaf laten we zien dat $\{\neg, \wedge, \vee\}$ functioneel volledig is.

De kleinste functioneel volledige verzameling die we hebben gezien, is een verzameling met twee voegtekens (bijvoorbeeld $\{\rightarrow, \neg\}$). We kunnen ons afvragen of er ook een verzameling met één voegteken bestaat die functioneel volledig is. Het zal al snel duidelijk zijn dat de ons bekende voegtekens niet sterk genoeg zijn om in hun eentje alle andere voegtekens 'te omvatten'. We zouden dus een nieuw voegteken moeten verzinnen, dat de gewenste eigenschap heeft.

Er zijn inderdaad ooit twee van dergelijke voegtekens 'ontdekt' die naar hun ontdekkers respectievelijk de 'Quine dagger' en de 'Sheffer stroke' heten. De Quine dagger schrijven we als † en de Sheffer stroke als |. Hun waarheidstafels zien er als volgt uit:

Quine dagger
Sheffer stroke

Quine dagger:

p	q	$p \dagger q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Sheffer stroke:

p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

FIGUUR 4. Quine dagger en Sheffer stroke

De betekenis van de Quine dagger komt overeen met het voegwoord 'noch': noch p, noch q, oftewel $\neg p \wedge \neg q$. Voor de Sheffer stroke is niet zo'n mooie vertaling, maar de betekenis is iets als 'niet zowel p als q', oftewel $\neg(p \wedge q)$. Als we kunnen laten zien dat we met één van deze voegtekens bijvoorbeeld de $\wedge$ en de $\neg$ kunnen definiëren , dan hebben we bewezen dat deze voegtekens 'in hun eentje' functioneel volledig zijn, omdat de verzameling $\{\wedge, \neg\}$ dat is. We laten het zien voor de Sheffer stroke:

$\neg p$ Eq $(p \mid p)$

$(p \wedge q)$ Eq $((p \mid q) \mid (p \mid q))$.

Hoe zien we dat dit juist is? Om de $\neg$ te controleren hoeven we alleen maar naar de waarheidstafel voor de '|' te kijken. Vervolgens kan het ons opvallen dat deze waarheidstafel precies het omgekeerde is van de waarheidstafel voor de $\wedge$. Oftewel $(p \mid q)$ Eq $\neg(p \wedge q)$. Als we nu de $\wedge$ willen definiëren , kunnen we ons bedenken dat het dus voldoende is om $\neg(p \mid q)$ te maken (n.l. $\neg(p \mid q)$ Eq $\neg\neg(p \wedge q)$ Eq $(p \wedge q)$). Maar de $\neg$ hadden we al! Als $\neg p$ Eq $(p \mid p)$ dan natuurlijk $\neg(p \mid q)$ Eq $((p \mid q) \mid (p \mid q))$. Einde bewijs. Conclusie: $\{|\}$ is een functioneel volledige verzameling. Hetzelfde geldt voor $\{\dagger\}$. Dit betekent dat iedere formule equivalent is met een formule die alleen maar de '|' (of de '†') als voegteken bevat!

We zien dus dat de propositielogica heel wat 'kaler' zou kunnen: één voegteken in plaats van vijf. Uit het oogpunt van gebruiksvriendelijkheid en leesbaarheid zullen we echter toch maar de ons bekende vijf voegtekens blijven gebruiken: in plaats van $((p \mid (q \mid q)) \mid (p \mid (q \mid q))) \mid (r \mid r)$ lees ik persoonlijk liever $(p \rightarrow q) \vee r$.

Tenslotte: wie dit allemaal spijkers op laag water vindt, dient zich te bedenken dat de logische circuits van een computer uitsluitend met 'Sheffer stroke-logica' werken (voor kenners: NAND-gates (Not-AND)). Alle andere logische bewerkingen worden met behulp van de Sheffer stroke geïmplementeerd—dus al het bovenstaande kent ook nog een buitengewoon praktische toepassing.

OPMERKING 4.4. In de eerste helft van de vorige eeuw waren de logici en filosofen nogal overdreven diep onder de indruk van zulke vereenvoudigingen als de Sheffer stroke. Bijvoorbeeld, Russell & Whitehead in het voorwoord van de tweede editie van *Principia Mathematica* schrijven:

> The most definite improvement resulting from the work in mathematical logic during the past fourteen years is the substitution, in Part I, Section A, of the one indefinable "p and q are incompatible", (or, alternatively, 'p and q are both false) for the two indefinables "not-p" and "p or q". This is due to Dr. H.M. Sheffer. [**RW70**], p xiii[2]

Wittgenstein in de Tractatus ([**Wit61**], eerste editie 1921) prijst de Sheffer stroke in 5.1311. Hij gebruikt een gegeneraliseerde Sheffer stroke voor zijn algemene vorm van de propositie (5.502).

Het bontst maakt Quine het die in zijn artikel *New Foundations* ([**Qui37**]) van 1937 laat zien dat je zijn systeem van verzamelingenleer kunt opbouwen met slechts twee primitieven —dat betekent dus zowel de onderliggende logica als de verzamelingenleer zelf.

In het gebruik zijn dat soort slimme systemen met zo weinig mogelijk connectieven meestal niet zo handig. Men voert i.h.a. zo snel mogelijk gedefinëerde connectieven in en werkt dan daar mee verder. Een tweede nadeel is dat als we onze benadering generaliseren allerlei indentificatie niet meer werken. Bijvoorbeeld constructieve logica kan gezien worden als een natuurlijke generalizatie van klassieke logica, alleen is disjunctie niet te definieren in termen van conjuctie en negatie. ❑

4.2. Normaalvormen. In deze paragraaf laten we zien dat we elk voegteken kunnen schrijven met $\{\neg, \wedge, \vee\}$. We doen dit door het construeren van een *normaalvorm* voor een willekeurig voegteken.

normaalvorm

Het blijkt dat we iedere formule kunnen herschrijven als een formule van de vorm $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, waarbij iedere A_i een conjunctie van atomen en negaties van atomen is. Oftewel: iedere formule is te schrijven als:

$$(B_{11} \wedge B_{12} \wedge \ldots \wedge B_{1m_1}) \vee (B_{21} \wedge B_{22} \wedge \ldots \wedge B_{2m_2}) \vee \ldots \vee (B_{k1} \wedge B_{k2} \wedge \ldots \wedge B_{km_k}),$$

een disjunctie van conjuncties, waarbij iedere B_{ij} een atoom of een genegeerd atoom is (p of ¬p). Een formule die deze vorm heeft staat in (of 'is een') disjunctieve normaalvorm. En als er een disjunctieve normaalvorm bestaat, zal er ook wel een conjunctieve normaalvorm bestaan —en zo is het.

disjunctieve normaalvorm
conjunctieve normaalvorm
literal

We noemen een formule B die hetzij een atoom, hetzij de negatie van een atoom is een *literal*. We schrijven ook wel, enigszins slordig $\pm p$ voor een literal.

DEFINITIE 4.5. Een formule A staat in ('is een') disjunctieve normaalvorm, als zij van de vorm (

$$(B_{11} \wedge B_{12} \wedge \ldots \wedge B_{1m_1}) \vee (B_{21} \wedge B_{22} \wedge \ldots \wedge B_{2m_2}) \vee \ldots \vee (B_{k1} \wedge B_{k2} \wedge \ldots \wedge B_{km_k})$$

is, waarbij iedere B_{ij} een literal is.

[2] De eerste editie van *Principia* was in 1910 en de tweede editie in 1926.

Een formule A staat in ('is een') conjunctieve normaalvorm, als zij van de vorm

$$(B_{11} \vee B_{12} \vee \ldots \vee B_{1m_1}) \wedge (B_{21} \vee B_{22} \vee \ldots \vee B_{2m_2}) \wedge \ldots \wedge (B_{k1} \vee B_{k2} \vee \ldots \vee B_{km_k})$$

is, waarbij iedere B_i een literal is. ❑

NB. De meeste lezers zullen van vroeger al een normaalvorm uit de algebra kennen, n.l. de vorm die je krijgt door 'haakjes te verdrijven':

$$\begin{aligned}(a+b)(a-c)(b+2c) &= (a^2-ac+ab-bc)(b+2c)\\ &= a^2b+2a^2c-abc-2ac^2+ab^2+2abc-b^2c-2bc^2\\ &= a^2b+2a^2c-2ac^2+ab^2+abc-b^2c-2bc^2.\end{aligned}$$

Deze normaalvorm bestaat uit een som van producten.

Er zijn eigenlijk twee normaalvorm stellingen. De eerste zegt dat elke formule die geschreven is met ons standaard repertoire van connectieven kan worden *herschreven* in conjunctieve en in disjunctieve normaal vorm. De tweede zegt dat elk willekeurig n-air voegteken kan worden gedefiniëerd door een formule in disjunctieve normaal vorm. De tweede variant is algemener, maar de eerste is daarom niet minder interessant omdat hij een reductie procedure geeft van de ene formule naar de andere. herschrijven

STELLING 4.6. *i. Iedere n-air voegteken kan worden gedefiniëerd door een formule in disjunctieve normaalvorm.*

ii. Iedere formule is equivalent met een formule in conjunctieve normaalvorm.

BEWIJS. We concentreren ons op het geval $n = 3$. We bezien dus een ternair voegteken #. Het is onmiddellijk duidelijk dat het bewijs voor willekeurige n werkt.

De waarheidstafel voor # zal uit acht rijen bestaan. De waarheidstafel voor # ziet er bijvoorbeeld als volgt uit:

			#
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

We zoeken dus een disjunctieve normaalvorm A, zeg in variabelen p, q, r met de volgende waarheidstafel.

p	q	r	A
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Onder A staan de gebruikelijke enen en nullen. Wanneer is A nu waar? A is waar voor die valuaties van p, q en r waarbij een 1 onder A staat. Oftewel, in ons voorbeeld: A is (precies dan) waar als zowel p, q als r onwaar zijn, of als p en q onwaar zijn en r waar is, of als p waar is en q en r onwaar zijn. Of: A is waar als je niet-p en niet-q en niet-r hebt, of als je niet-p en niet-q en r hebt, of als je p en niet-q en niet-r hebt.

A is dus waar als $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ waar is (en onwaar anders). Maar dan kunnen we voor A dus deze formule kiezen. En deze formule is een disjunctieve normaalvorm. Het is duidelijk dat deze procedure op willekeurige voegtekens van toepassing is en dat het resultaat iedere keer een disjunctieve normaalvorm zal zijn die equivalent is met de zelfde waarheidstafel als het gegeven voegteken. Waarmee deel (i) van de stelling bewezen is. Bedenk je overigens dat dit bewijs niet alleen een bewijs is, maar tevens een algorithme levert voor de constructie van een concrete disjunctieve normaalvorm.

Het bewijs voor deel (ii) gaat analoog. Als we naar de nullen onder A kijken, kunnen we ons bedenken dat we de bijbehorende valuaties nou net niet moeten hebben als we A waar willen maken. Dus we moeten niet 'niet-p en q en niet-r' hebben en we moeten ook niet 'niet-p en q en r' hebben en ook niet 'p en niet-q en r' en ook niet 'p en q en niet-r' en tenslotte ook niet 'p en q en r'. Als we al deze vijf gevallen 'niet hebben' dan 'hebben we' dus één van de andere drie —en dat zijn precies de gevallen waarin A waar is. Wat we dus moeten hebben is

$$\neg(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg p \wedge q \wedge r) \wedge \neg(p \wedge \neg q \wedge r) \wedge \neg(p \wedge q \wedge \neg r) \wedge \neg(p \wedge q \wedge r).$$

Als we op ieder conjunct de equivalentie $\neg(p \wedge q)$ Eq $(\neg p \vee \neg q)$ toepassen (één van de wetten van de Morgan), dan krijgen we:

$$(p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r).$$

Et voila!, daar hebben we onze conjunctieve normaalvorm, die equivalent is met A. Ook hier geldt weer dat dit bewijs eenvoudig te generaliseren is tot willekeurige formules. ❑

Tot slot: realiseer je dat normaalvormen niet uniek zijn: een formule kan meerdere disjunctieve (resp. conjunctieve) normaalvormen hebben —die uiteraard wel allemaal equivalent zijn. Een disjunctieve normaalvorm van $p \leftrightarrow q$ is bijvoorbeeld

$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$. Een andere disjunctieve normaalvorm van dezelfde formule is $(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$ (jaja!). Er bestaat dus niet zoiets als *de* normaalvorm van een formule.

Realiseer je tevens dat conjuncties en disjuncties met slechts één element mogelijk zijn. Op die manier is 'p' een conjunctie (of disjunctie) met maar één conjunct (disjunct). De formule $p \vee q$ staat dan al in zowel conjunctieve als disjunctieve normaalvorm: het is een disjunctie van twee conjuncties die beide uit maar één element bestaan: $(p \wedge \text{-}) \vee (q \wedge \text{-})$, als we even '-' gebruiken voor 'niets'. Tegelijkertijd is $p \vee q$ een conjunctie die maar één element bevat: $(p \vee q) \wedge \text{-}$. In de definitie heeft dus ieder rijtje B_i's lengte 1 of groter en niet 2 of groter, zoals je misschien zou denken. Er hoeft ook maar één zo'n rijtje B_i's te zijn. $p \wedge (q \vee r)$ is dus een legale conjunctieve normaalvorm, waarbij de eerste conjunct lengte 1 heeft. De kortste conjunctieve en disjunctieve normaalvorm is 'p' (en dit is uiteraard de normaalvorm van... p!)

Opmerking 4.7. * Net als er, al wat vreemde, conjuncties en disjuncties van één element kunnen zijn, zijn er, zo mogelijk nog vreemdere, disjuncties en conjuncties van nul elementen. De lege conjunctie is $\top$.[3] De lege disjunctie is $\bot$. Je kunt dit zo begrijpen: hoe meer elementen je in een conjunctie opneemt hoe 'onwaarder' de formule wordt. Omgekeerd: hoe minder hoe waarder. Nul conjuncten zal dus heel erg waar zijn en daarom nemen we het als $\top$. Een soortgelijke redenering kan toegepast worden voor de lege disjunctie.

Hier heb je de disjunctieve normaalvormen voor een 0-air connectief. Dit kan een lege disjunctie van lege conjuncties zijn en dus $\bot$. Het kan ook een disjunctie van de unieke lege conjunctie zijn en daarmee $\top$. ❑

Opmerking 4.8. * We schrijven $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ ook wel als $\bigwedge\{A_1, \ldots, A_n\}$ of als $\bigwedge_{1 \le i \le n} A_i$. In de eerste variant abstraheren we van de volgorde van de A_i. Dat wordt gerechtvaardigd door de commutativiteit van conjunctie. Op dezelfde manier, schrijven we soms $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ ook wel $\bigvee\{A_1, \ldots, A_n\}$ of $\bigvee_{1 \le i \le n} A_i$.

Met deze notatie kunnen we zeggen dat elke n-air voegteken in disjunctieve normaalvorm geschreven kan worden als:

$$\bigvee_{1 \le i \le k} \bigwedge_{1 \le j \le m_i} B_{ij}.$$

Hier zijn de B_{ij} literals van de atomen $p_1, \ldots, p_n$. ❑

Opmerking 4.9. * Hier is een wat mathematischer 'de luxe' versie van het bewijs dat elk voegteken een disjunctieve normaal vorm heeft. De 'de luxe' versie is misschien moeilijker te begrijpen, maar wel preciezer en korter. We gebruiken de notatie uit de bovenstaande opmerking.

Bezie een n-air voegteken F, dat is een functie van de verzameling VAL_n van valuaties of de atomen $p_1, \ldots, p_n$ naar $\{0, 1\}$.

Bezie V in VAL_n. Zij $B_{V,i} := p_i$ als $V(p_i) = 1$ en $\neg p_i$ als $V(p_i) = 0$. We definiëren: $C_V := \bigwedge_{1 \le i \le n} B_{V,i}$. Voor willekeurige $W \in \mathsf{VAL}_n$ hebben we nu:

$$W \models C_V \quad \Leftrightarrow \quad W = V.$$

[3] In ons stadaard repertoire moeten we dit schrijven als $\neg\bot$.

Immers, als $W \models C_V$, dan $W \models B_{V,i}$, en daarmee $W(p_i) = V(p_i)$. Andersom, als $W = V$, volgt dat $W \models B_{V,i}$.

We definiëren:

$$D_F := \bigvee\{C_V \mid V \in \mathsf{VAL}_n \text{ and } F(V) = 1\}.$$

Er volgt:

$$\begin{aligned} V \models D_F \quad &\Leftrightarrow \quad \text{voor zekere } W \text{ in } \mathsf{VAL}_n,\ W \models C_V \text{ en } F(W) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{voor zekere } W \text{ in } \mathsf{VAL}_n,\ W = V \text{ en } F(W) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad F(V) = 1 \end{aligned}$$

En dat is nu precies wat we moesten bewijzen. ❑

En dat was het dan weer wat de semantiek betreft.

5. Samenvatting

Definitie 1.1. Valuaties als functies: Een valuatie V is een afbeelding die aan formules van de propositielogica waarheidswaarden toekent. Om te beginnen wordt aan de propositieletters een waarheidswaarde toegekend. Door de waarheidsfunctionaliteit van de voegtekens is, gegeven de waarheidswaarden van de in een formule voorkomende propositieletters, de waarheidswaarde van de hele formule uit te rekenen. Deze valuatie V van formules is als volgt gedefinieerd:

1. i. $V(p_i) \in \{0, 1\}$ voor alle i,

   ii. $V(\bot) = 0$ (sem$\bot$)

2. i. $V(\neg A) = 1$ desda $V(A) = 0$ (sem$\neg$)

   Alternatief: $V(\neg A) = 1 - V(A)$

   ii. $V(A \wedge B) = 1$ desda $V(A) = 1$ en $V(B) = 1$ (sem$\wedge$)

   Alternatief: $V(A \wedge B) = \mathsf{min}(V(A), V(B))$

   iii. $V(A \vee B) = 1$ desda $V(A) = 1$ en/of $V(B) = 1$ (sem$\vee$)

   Alternatief: $V(A \vee B) = \mathsf{max}(V(A), V(B))$

   iv. $V(A \to B) = 1$ desda $V(A) = 0$ en/of $V(B) = 1$ (sem$\to$)

   Alternatief: $V(A \to B) = \mathsf{max}(1 - V(A), V(B))$

   v. $V(A \leftrightarrow B) = 1$ desda $V(A) = V(B)$ (sem$\leftrightarrow$)

   Alternatief: $V(A \leftrightarrow B) = V(A) + V(B)\ (\mathsf{mod}\ 2)$
   (We nemen $n\ \mathsf{mod}\ 2 := 0$, als n is even en $n\ \mathsf{mod}\ 2 := 1$ als n is oneven.)

Definitie 2.1. Valuaties als modellen.

1. $V \models p$ desda $V(p) = 1$
2. $V \not\models \bot$ (sem$\bot$)
3. $V \models \neg A$ desda $V \not\models A$ (sem$\neg$)
4. $V \models (A \wedge B)$ desda $V \models A$ en $V \models B$ (sem$\wedge$)

5. $V \models (A \vee B)$ desda $V \models A$ en/of $V \models B$ (sem$\vee$)

6. $V \models (A \to B)$ desda $V \not\models A$ en/of $V \models B$ (sem$\to$)

7. $V \models (A \leftrightarrow B)$ desda ($V \models A$ en $V \models B$) of ($V \not\models A$ en $V \not\models B$) (sem$\leftrightarrow$)

Definitie 2.2:

i. $V \models \Gamma =_{\mathsf{def}} V \models A$, voor alle $A \in \Gamma$

ii. $\Gamma \models A =_{\mathsf{def}} V \models \Gamma \Rightarrow V \models A$, voor alle valuaties V

iii. $A_1, \ldots, A_n \models B =_{\mathsf{def}} \{A_1, \ldots, A_n\} \models B$

Definitie 2.4:

i. $\Gamma, \Delta \models A =_{\mathsf{def}} \Gamma \cup \Delta \models A$

ii. $\Gamma, A_1, \ldots, A_n \models B =_{\mathsf{def}} \Gamma \cup \{A_1, \ldots, A_n\} \models B$

iii. $\models A =_{\mathsf{def}} \varnothing \models A$

Merk op dat $\models A$ dan en slechts dan als, voor alle V, $V \models A$.

Definitie 3.1: Een verzameling formules Γ is vervulbaar desda er tenminste één valuatie V is zodat $V \models \Gamma$.

In plaats van *vervulbaar* zegt men ook soms: *semantisch consistent*. De Engelse term voor *vervulbaar* is: *satisfiable*.

semantisch consistent
satisfiable

Definitie 3.2: Een verzameling formules Γ is strijdig desda hij niet vervulbaar is. Oftewel: Een verzameling formules Γ is strijdig desda voor alle valuaties V: $V \not\models \Gamma$.

In plaats van *strijdig* zegt men ook soms: *semantisch inconsistent*. De Engelse term voor *vervulbaar* is: *contradictory*.

semantisch inconsistent
contradictory

Stelling 3.3:

i. Γ is vervulbaar desda $\Gamma \not\models \bot$.

ii. Γ is strijdig desda $\Gamma \models \bot$.

Stelling 3.4:

i. Als $\Gamma \subseteq \Delta$ en Γ is strijdig, dan is Δ strijdig.

ii. Als $\Gamma \subseteq \Delta$ en Δ is vervulbaar, dan is Γ vervulbaar.

Definitie 3.5: Een redeneerschema Γ/A is geldig desda $\Gamma \models A$.

Definitie 3.6: Een redeneerschema Γ/A is ongeldig desda het niet geldig is.

Stelling 3.7: $\Gamma \models B \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \cup \{\neg B\}$ is strijdig

Definitie 3.8: Een formule A is een tautologie desda voor alle valuaties V geldt dat $V \models A$. M.a.w., A is een tautologie als $\models A$.

Definitie 3.9: Een formule A is een contradictie desda voor alle valuaties V geldt dat $V \not\models A$. M.a.w. A is een contradictie als $\{A\}$ strijdig is. Nog anders gezegd: A is een contradictie als $A \models \bot$.

Definitie 3.10: Een formule A is contingent desda er minstens één valuatie V is zodat $V \not\models A$ en er minstens één valuatie V' is zodat $V' \models A$.

Stelling 3.11: $\Gamma, A \models B$ desda $\Gamma \models A \to B$

Stelling 3.12: We hebben:

I. $(A \wedge \bot)$ Eq $\bot$

II. $(A \vee \bot)$ Eq A

III. $(A \wedge \neg\bot)$ Eq A

IV. $(A \vee \neg\bot)$ Eq $\neg\bot$

V. $(A \wedge A)$ Eq A idempotentie van de $\wedge$

VI. $(A \vee A)$ Eq A idempotentie van de $\vee$

VII. $(A \wedge B)$ Eq $(B \wedge A)$ commutativiteit van de $\wedge$

VIII. $(A \vee B)$ Eq $(B \vee A)$ commutativiteit van de $\vee$

IX. $(A \wedge B) \wedge C$ Eq $A \wedge (B \wedge C)$ associativiteit van de $\wedge$

X. $(A \vee B) \vee C$ Eq $A \vee (B \vee C)$ associativiteit van de $\vee$

XI. $A \wedge (B \vee C)$ Eq $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ distributiviteit van de $\wedge$ over de $\vee$

XII. $A \vee (B \wedge C)$ Eq $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ distributiviteit van de $\vee$ over de $\wedge$

XIII. $\neg\neg A$ Eq A dubbele negatie eliminatie

wetten van de Morgan

XIV. $\neg(A \wedge B)$ Eq $\neg A \vee \neg B$ een wet van de Morgan

XV. $\neg(A \vee B)$ Eq $\neg A \wedge \neg B$ een andere wet van de Morgan

XVI. $\neg A$ Eq $A \to \bot$

XVII. $(A \to B)$ Eq $(\neg A \vee B)$

XVIII. $\neg(A \to B)$ Eq $(A \wedge \neg B)$

XIX. $(A \leftrightarrow B)$ Eq $((A \to B) \wedge (B \to A))$

XX. $(A \leftrightarrow B)$ Eq $((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$

XXI. $(A \to B)$ Eq $(\neg B \to \neg A)$ contrapositie

XXII. $(A \to (B \to C))$ Eq $((A \wedge B) \to C)$

XXIII. $(A \to (B \to C))$ Eq $(B \to (A \to C))$

Definitie 3.13: De formule $A[p := B]$ is de formule die ontstaat door in de formule A alle voorkomens van de propositieletter p te vervangen door de formule B. NB. lees de ':=' als 'wordt', dus '$A[p := B]$' ongeveer als 'A, met p wordt B'.

Stelling 3.14 (Substitutiestelling):

i. $V(A) = V(B) \Rightarrow V(C[p := A]) = V(C[p := B])$

ii. $A \leftrightarrow B \models C[p := A] \leftrightarrow C[p := B]$

iii. $\models A \leftrightarrow B \Rightarrow\ \models C[p := A] \leftrightarrow C[p := B]$

Definitie 4.3: Een verzameling logische voegtekens is functioneel volledig als je er alle mogelijke logische voegtekens mee kunt maken.

Definitie 4.5: Een formule A staat in ('is een') disjunctieve normaalvorm, als zij van de vorm

$$(B_{11} \wedge B_{12} \wedge \ldots \wedge B_{1m_1}) \vee (B_{21} \wedge B_{22} \wedge \ldots \wedge B_{2m_2}) \vee \ldots \vee (B_{k1} \wedge B_{k2} \wedge \ldots \wedge B_{km_k})$$

is, waarbij iedere B_{ij} een literal is.

Een formule A staat in ('is een') conjunctieve normaalvorm, als zij van de vorm

$$(B_{11} \vee B_{12} \vee \ldots \vee B_{1m_1}) \wedge (B_{21} \vee B_{22} \vee \ldots \vee B_{2m_2}) \wedge \ldots \vee (B_{k1} \vee B_{k2} \vee \ldots \vee B_{km_k})$$

is, waarbij iedere B_i een literal is.

Stelling 4.6

i. Iedere n-air voegteken kan worden gedefiniëerd door een formule in disjunctieve normaalvorm.

ii. Iedere formule is equivalent met een formule in conjunctieve normaalvorm.

6. Opgaven

1. Bij Paragraaf 7.1. Gegeven is de valuatie V met V(p) = V(q) = 1 en V(r) = V(s) = 0. Bereken (en laat zien hoe je de semantische regels gebruikt):
   i. $V(\neg(p \wedge \neg p))$
   ii. $V((p \wedge q) \wedge r)$
   iii. $V((p \vee r) \rightarrow s)$
   iv. $V(\neg s \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$
   v. $V(\neg(\neg r \rightarrow s) \vee \neg q)$
   vi. $V(\neg\neg(s \vee \neg p) \vee q)$
   vii. $V((p \rightarrow \perp) \rightarrow \neg p)$
   viii. $V(\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg r \rightarrow s))$
   ix. $V((r \leftrightarrow \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow s))$
   x. $V((p \vee (q \leftrightarrow \neg(r \rightarrow (s \wedge (\neg\perp \rightarrow p))))))$
2. Bij Paragraaf 7.1.
   i. Bepaal $V(p)$ als $V((p \wedge q) \rightarrow r) = 0$
   ii. Bepaal $V(q)$ als $V(\neg(p \vee q)) = 1$
   iii. Bepaal $V(p)$, $V(q)$ en $V(r)$ als $V(p \rightarrow (q \rightarrow r)) = 0$
   iv. Bepaal $V(s)$ als $V(s \leftrightarrow \neg(p \vee \neg p)) = 0$
   v. Bepaal $V(p)$, $V(q)$, $V(r)$, $V(s)$ en $V(t)$ als $V(((p \vee \neg q) \rightarrow t) \wedge (((s \wedge r) \leftrightarrow q) \wedge \neg t)) = 1$

3. Bij Paragraaf 7.1. Gegeven de valuaties V_1 en V_2 met $V_1(p) = V_1(q) = 0$, $V_1(r) = 1$ en $V_2(p) = V_2(r) = 1$, $V_2(q) = 0$. Construeer formules A, B en C, die alledrie de atomen p, q en r bevatten, zodat $V_1(A) = V_2(A)$, $V_1(B) \neq V_2(B)$, $V_1(C) = V_2(A \to B)$

4. Bij Paragraaf 7.2. Gegeven een valuatie V met $V \models p$, $V \models q$, $V \not\models r$ en $V \not\models s$. Bepaal of de volgende uitspraken waar zijn (en laat zien hoe je de semantische regels gebruikt):

    i. $V \models p \vee \neg p$

    ii. $V \models (p \wedge q) \to r$

    iii. $V \models \neg\neg p \wedge \neg r$

    iv. $V \models (p \vee r) \to \neg s$

    v. $V \models r \leftrightarrow \neg(q \wedge s)$

    vi. $V \models q \to ((\bot \to r) \to s)$

    vii. $V \models (((\neg p \vee q) \vee \neg r) \vee s)$

    viii. $V \models (r \vee \neg\bot) \leftrightarrow (\neg p \to q)$

    ix. $V \models \neg((p \to \neg\neg r) \wedge \neg(s \leftrightarrow \neg p))$

    x. $V \models (\neg p \vee (q \leftrightarrow \neg(r \to (s \wedge (\neg\bot \to p)))))$

5. Bij Paragraaf 7.2. Bepaal of in de volgende gevallen $V \models p$ of $V \not\models p$:

    i. $V \models \neg p \to \bot$

    ii. $V \not\models \neg(p \wedge q)$

    iii. $V \not\models (p \to (q \to (r \to s)))$

    iv. $V \models ((p \to q) \vee (q \to p)) \leftrightarrow p$

    v. $V \models ((\neg q \to p) \wedge \neg(p \to q))$

6. Bij Paragraaf 7.2. Gegeven: $V_1 \models p$, $V_1 \models q$, $V_1 \not\models r$ en $V_2 \models p$, $V_2 \not\models q$, $V_2 \not\models r$. Construeer formules A, B en C, die alledrie de atomen p, q en r bevatten, zodat $V_1 \models A$ en $V_2 \not\models A$, $V_1 \not\models B$ en $V_2 \models B$, $V_1 \models (C \leftrightarrow (A \to B))$ en $V_2 \not\models (C \leftrightarrow (A \to B))$

7. Bij Paragraaf 7.2. Gegeven: $V \models \{(p \to q), (\neg r \vee \neg q), r\}$. Bepaal of de volgende uitspraken waar zijn:

    i. $V \models \neg p \vee \neg r$

    ii. $V \models q \to (p \to \neg r)$

    iii. $V \models (r \leftrightarrow \neg p) \to (q \wedge r)$

    iv. $V \models \neg(p \vee \neg r) \leftrightarrow (\bot \wedge (\neg q \leftrightarrow (r \leftrightarrow p)))$

8. Bij Paragraaf 7.2. Laat zien dat:

    i. $p, p \to q \models q$

ii. $\neg(p \vee q) \models p \leftrightarrow q$

iii. $p, \neg(p \wedge \neg q) \models p \to q$

iv. $(p \vee q), (p \to q) \not\models (p \wedge q)$

9. Bij Paragraaf 7.3. Bepaal of de volgende verzamelingen vervulbaar of strijdig zijn:

i. $\{\neg p \vee q, \neg q \vee \neg p, p\}$

ii. $\{\neg(p \wedge q), q \to r, \neg r \wedge p\}$

iii. $\{\neg(p \vee \neg\neg q), r \to q, \neg p \to r\}$

iv. $\{p \vee (q \vee \neg r), \neg p \to (r \wedge \neg q), q \to \neg p, p \to \neg\neg q\}$

v. $\{\neg(p \to q) \wedge \neg r, (p \to (p \to \neg r)) \vee \neg(q \leftrightarrow r)\}$

vi. $\{(p \vee q) \vee r, p \to (\neg q \wedge \neg r), q \to (\neg p \wedge \neg r), r \to (\neg p \wedge \neg q)\}$

10. Bij Paragraaf 7.3: Bewijs Stelling 3.4 (ii)

11. Bij Paragraaf 7.3: Toets de geldigheid van de volgende redeneerschema's:

i. $(p \wedge q) \to r, r \to s, q \wedge \neg s / \neg p$

ii. $p \to q / p$

iii. $p \to q / q$

iv. $\neg q / \neg((p \to q) \vee ((q \to p) \to p))$

v. $(p \to \neg q), (p \to q) / r$

vi. $(p \to \neg q), (q \to p) / \neg q$

vii. $\neg p \wedge (q \to (r \vee p)), (p \vee \neg q) \vee r / q \to p$

viii. $p, p \to (q \to r), \neg r / \neg q$

12. Bij Paragraaf 7.3. Idem voor:

i. $(p \vee \neg q), (p \to r) / \neg(q \wedge \neg r)$

ii. $(p \vee q), \neg(p \wedge q) / (p \to q)$

iii. $((p \vee q) \wedge r), (\neg s \to \neg q) / ((p \wedge r) \vee s)$

iv. $(p \to q), \neg(\neg p \vee q), (r \to \neg q) / (\neg r \leftrightarrow (p \vee q)) \to (q \to \neg p)$

13. Bewijs Stelling 3.7(ii)

14. Toon aan:

i. $\Gamma \models A, \Gamma \models B \;\Rightarrow\; \Gamma \models (A \wedge B)$

ii. $\Gamma \models A \;\Rightarrow\; \Gamma \models (A \vee B)$

iii. $\Gamma \cup \{A\}$ is strijdig $\;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \neg A$

iv. $\Gamma, \neg A \models B \;\Leftrightarrow\; \Gamma, \neg B \models A$

15. Bewijs dat de formules in voorbeeld (iii) in Paragraaf 7.3.3 allen tautologieën zijn.

16. Bewijs dat alle als volgt opgebouwde formules tautologieën zijn:

    i. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

    ii. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

    iii. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C))$

    iv. $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \to C)$

17. Idem voor:

    i. $\neg(A \wedge \neg A)$

    ii. $((A \to B) \to A) \to A$ (Wet van Peirce)

    iii. $(A \vee B) \leftrightarrow ((A \to B) \to B)$

    iv. $((A \to B) \wedge \neg B) \to \neg A$

    v. $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(A \to \neg B)$

    vi. $(\neg A \vee B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

18. Toon aan:

    i. Als A een tautologie is, dan geldt $(A \wedge B)$ Eq B.

    ii. Als A een contradictie is, dan geldt $(A \vee B)$ Eq B.

19. Bewijs de volgende uitspraken:

    i. De verzameling tautologieën is precies even groot als de verzameling contradicties.

    ii. Alle tautologieën zijn equivalent.

20. Laat A van de volgende vorm zijn: $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, waarbij de A_i's alleen maar atomen of negaties van atomen zijn. Bewijs dat A dan en alleen dan een tautologie is als onder de A_i's een atoom p en zijn negatie $\neg p$ voorkomen.

21. Bewijs de equivalenties uit Stelling 3.12.

22. Gegeven: $A = ((p \to q) \vee \neg r)$, $B = (\neg(\neg q \wedge (p \to (r \leftrightarrow \neg p))))$. Schrijf voluit:

    i. $A[p := B]$

    ii. $A[q := B]$

    iii. $A[r := B]$

    iv. $B[p := A]$

    v. $B[q := A]$

    vi. $B[r := A]$

23. Ga na welke van de volgende beweringen juist zijn. Geef tegenvoorbeelden voor onjuiste beweringen en bewijs de juiste beweringen.

i. $\{A \vee B\}$ is vervulbaar $\Leftrightarrow$ $\{A, B\}$ is vervulbaar

ii. $A \vee B$ is een tautologie desda A is een tautologie of B is een tautologie

iii. Als $\Gamma \models A$, $\Gamma \models B$, en $A, B \models C$, dan $\Gamma \models C$

iv. $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B \Rightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \models B$

24. Bij Paragraaf 7.4: Laat van de volgende verzamelingen zien dat ze functioneel volledig zijn:

    i. $\{\wedge, \neg\}$

    ii. $\{\rightarrow, \neg\}$

    iii. $\{\rightarrow, \perp\}$

25. i. Definieer $\neg A$ m.b.v. de Quine Dagger (†).

    ii. Definieer $(A \vee B)$ m.b.v. de Quine Dagger.

    iii. Toon aan dat iedere formule logisch equivalent is met een formule waarin alleen het voegteken † voorkomt.

26. Zet de volgende formules om in formules die alleen $\vee$ en $\neg$ bevatten (maak gebruik van de equivalenties uit stelling 3.12):

    i. $(A \rightarrow (B \wedge C))$

    ii. $(A \leftrightarrow B)$

    iii. $((A \wedge B) \wedge \mathrm{C})$

    iv. $(A \rightarrow (B \rightarrow \perp))$

27. Zet de volgende formules om in formules die alleen $\wedge$ en $\neg$ bevatten:

    i. $(A \rightarrow (B \vee C))$

    ii. $(B \leftrightarrow C)$

    iii. $((A \vee B) \vee C)$

    iv. $(A \rightarrow (B \rightarrow \perp))$

28. Beschouw in deze opgave alleen formules met $\wedge$, $\vee$ en $\neg$. We willen proberen de negaties zo ver mogelijk binnen de haakjes te brengen.

    i. Toon aan:

$$\begin{array}{rcl} \neg(A \wedge (\neg B \vee C)) & \mathsf{Eq} & \neg A \vee (B \wedge \neg C) \\ \neg((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge (B \vee \neg C))) & \mathsf{Eq} & (\neg A \vee B) \wedge (A \vee (\neg B \wedge C)) \\ \neg((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge C)) & \mathsf{Eq} & (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C) \end{array}$$

    ii. Toon aan dat iedere formule logisch equivalent is met een formule waarin alleen voor de atomen negaties staan. Welke logische wetten uit Stelling 3.12 gebruik je?

29. Geef van de volgende formules zowel de conjunctieve als de disjunctieve normaalvorm:

i. $\neg(p \vee q) \wedge r$

ii. $(p \to \neg q) \to r$

iii. $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg(p \vee q)$

iv. $\neg p \to \neg(q \leftrightarrow r)$

v. $(p \to (\neg q \to r)) \vee (\neg\neg r \leftrightarrow (p \wedge q))$

30. Laat zien dat er geen functioneel volledige verzameling van unaire voegtekens kan zijn.

31. * Laat zien dat $\{\bot, \wedge, \vee\}$ niet functioneel volledig is. (Hint: laat zien dat je negatie niet kunt definiëren.)

32. * Laat zien dat $\{\bot, \leftrightarrow\}$ niet functioneel volledig is.

33. * Bezie een formule A en een atoom p. Laat zien dat er een formule B is zodat: (i) $B \ \mathsf{Eq}\ A$, (ii) het atoom p komt hoogstens twee keer voor in B, (iii) voor alle atomen q geldt dat het aantal voorkomens van q in B kleiner of gelijk is aan het aantal voorkomens van q in A.

34. * Stel C bevat geen $\leftrightarrow$. Stel dat p alleen of positieve plaatsen voorkomt in C. laat zien dat: $A \to B \models C[p := A] \to C[p := B)$. Wat gebeurt er als p alleen op negatieve plaatsen voorkomt?

35. * Bezie een willekeurige formule A met propositionele atomen $p_1, \ldots, p_n$. Laat zien dat er formules $B_1, \ldots,\ B_n$ zijn zodat, voor alle formules C in $p_1, \ldots p_n$: $A \models C$ desda $\models C[p_1 := B_1, \ldots, p_n := B_n]$. (Hier is $C[p_1 := B_1, \ldots, p_n := B_n]$ het resultaat van simultane substitutie van de B_i voor de p_i.

36. ** Stel dat we een volledig stel voegtekens hebben waar ook $\bot$ toe behoort. Laat zien dat we negatie $\neg p$ kunnen definiëren met een formule met precies één voorkomen van p en geen voorkomens van andere variabelen. Laat zien dat we conjunctie $p \wedge q$ kunnen definiëren met een formule met precies één voorkomen van p, precies één voorkomen van q, en geen voorkomens van andere variabelen.

HOOFDSTUK 8

Redeneringen en bewijzen

Hmm, bewijzen ... dat klinkt alsof het nu serieus gaat worden. Helaas, helaas! De enthousiaste student moet weer teleurgesteld worden. Bijna alles wat in dit hoofdstuk aan bod komt, is al eerder ter sprake geweest. Het wordt nu tijd om alle opgedane kennis een beetje te integreren. Met andere woorden: we gaan kijken wat we nu met al het voorgaande werkelijk kunnen doen. In dit hoofdstuk zal, hopelijk, blijken dat logica ook nog ergens nuttig voor is (wellicht tot verrassing van velen). Genoeg gekeuveld —aan den arbeid.

1. Bewijsbaarheid versus geldigheid

Wat waarheid of geldigheid is, weten we al —zolang we het over logische waarheid hebben en niet over filosofische: valuaties maken formules waar, waarbij je aan een valuatie kunt denken als een 'mogelijke wereld' of een mogelijke toestand van de wereld. Zo'n toestand wordt geheel vastgelegd door te bepalen welke atomaire zinnen waar zijn en welke niet. Toestanden die precies dezelfde atomen waar maken, zijn (in de logica) hetzelfde. Als een toestand/wereld/valuatie V een formule A waar maakt schrijven we $V \models A$ en we zeggen dan 'V maakt A waar'. Op dezelfde wijze kunnen we ook zeggen dat een bepaalde verzameling formules Γ een formule A waar maakt. We bedoelen dan dat iedere toestand/valuatie die de formules uit Γ waar maakt, ook A waar maakt. We schreven dit als $\Gamma \models A$ en zeiden dan ook wel dat de redenering Γ/A geldig is. Er is al eerder op gewezen dat waarheid een strikt semantisch begrip is: het legt verbanden tussen formules op het nivo van waarheidswaarden en aangezien de verwijzing (denotatie) van een formule haar waarheidswaarde is (wat zou anders de verwijzing van $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$ moeten zijn?), wordt er door het begrip 'waarheid' dus een verband tussen formules op betekenis (= semantisch) nivo gelegd. Om deze reden hanteerden we dan ook wel het begrip 'semantisch gevolg' (zie Definitie 2.2 in Pararagraaf 7.2).

Er is een syntactische tegenhanger van het begrip 'waarheid' en dat is het begrip bewijsbaarheid of afleidbaarheid. Net zoals een verzameling Γ een formule A waar kan maken, zo kan A ook bewijsbaar zijn uit Γ (in een of ander formeel systeem). 'Geldigheid' of 'waarheid' speelt zich af op het nivo van de semantiek (eigenlijk: modeltheorie)—het maakt namelijk gebruik van valuaties. 'Bewijsbaarheid' speelt zich af op het nivo van de syntaxis (eigenlijk: bewijstheorie)—het maakt geen gebruik van valuaties (modellen), maar vat logica op als een puur symbolisch (syntactisch) systeem, waarin je bewijzen kunt produceren door rijtjes symbolen te manipuleren.

bewijsbaarheid
afleidbaarheid
semantiek
modeltheorie
bewijstheorie

Als je laat zien dat een gegeven valuatie een bepaalde formule waar maakt, dan heb ik een semantisch bewijs geleverd—een bewijs op het nivo van waarheidswaarden.

semantisch bewijs

In het volgende hoofdstuk zullen we echter een bewijssysteem tegenkomen dat helemaal geen gebruik maakt van waarheidswaarden of valuaties. In dit systeem wordt de logische taal benaderd als een systeem dat rijtjes symbolen genereert. Door deze symbolen op een bepaalde wijze te manipuleren kun je andere rijtjes symbolen maken. Als het nu mogelijk is om door symboolmanipulatie van de rijtjes symbolen in Γ het rijtje A te maken, dan zeggen we dat Γ/A bewijsbaar is, of dat je A uit Γ af kunt leiden.

enkele turnstile

Net zoals we voor geldigheid een symbool hebben, namelijk de dubbele turnstile $\models$, zo hebben we ook voor bewijsbaarheid een symbool: de enkele turnstile (of gewoon: turnstile of draaihekje): $\vdash$. Als Γ de formule A waar maakt schrijven we $\Gamma \models A$. Als A uit Γ afleidbaar is schrijven we $\Gamma \vdash A$. We spreken dit uit als 'gamma bewijst A'. Net als bij de dubbele turnstile hebben we ook een 'negatieve' variant: $\Gamma \nvdash A$ betekent 'het is niet zo dat gamma A bewijst'.

semantisch bewijs

syntactisch bewijs

Op het eerste gezicht lijken de begrippen 'geldigheid' en 'bewijsbaarheid' sterk op elkaar: als je uit de waarheid van Γ de waarheid van A aantoont, heb je een bewijs gemaakt van $\Gamma \models A$. Als je door op de juiste wijze symbolen te manipuleren laat zien dat je van de rijtjes in Γ het rijtje A kan maken, heb je een bewijs van $\Gamma \vdash A$ gemaakt. In het eerste geval gaat het om een semantisch bewijs, waar dus de geldigheid van een redenering wordt bewezen. In het tweede geval gaat het om een syntactisch bewijs, een formele constructie in een bewijssysteem. We onderscheiden dus bewijzen van geldigheid en bewijzen van bewijsbaarheid. Dit onderscheid kan niet sterk genoeg benadrukt worden, want ook al lijkt het allemaal één pot nat te zijn, dit is toch geenszins het geval.

Eén van de grootste verschillen tussen beide benaderingen is dat semantische bewijzen zich kunnen uitspreken over concrete modellen, terwijl syntactische bewijzen dat niet kunnen (deze zijn immers modelonafhankelijk). Het is dus mogelijk om voor een bepaalde valuatie te laten zien dat zij een formule A waar (of onwaar) maakt. We kunnen echter niet een corresponderend syntactisch bewijs leveren. Een andere benadering van hetzelfde: voor iedere formule A en iedere valuatie V geldt dat $V \models A$ of $V \models \neg A$ (immers als $V \not\models A$, dan volgens sem$\neg$: $V \models \neg A$). Het is echter niet zo dat als een formule niet bewijsbaar is, zijn tegendeel dat wel is (dus niet: $\nvdash A \Rightarrow \vdash \neg A$). Dit betekent dat contingente formules niet op syntactische wijze bewezen kunnen worden. Dat is maar goed ook: we willen natuurlijk juist dingen bewijzen die 'werkelijk het geval zijn' en niet dingen die soms wel en soms niet waar zijn.

Er is wel een manier om dit verschil te overbruggen. We kunnen een valuatie (min of meer) opvatten als de verzameling atomen die door die valuatie worden waargemaakt. Stel dat voor een valuatie V geldt dat $V \models p$ en $V \models q$. Dan ook $V \models p \wedge q$. Het bewijs hiervoor is niet rechtstreeks naar een equivalent syntactisch bewijs te vertalen. We zouden echter ook kunnen schrijven dat $p, q \models (p \wedge q)$ (hoewel dit strikt genomen een sterkere uitspraak is —n.l. dat alle valuaties die p en q waar maken ook $p \wedge q$ waar maken). Nu hebben we een redenering die valuatie-onafhankelijk is en waar we ook een syntactische variant van zouden kunnen maken. Het zal inderdaad blijken dat $p, q \vdash (p \wedge q)$.

Een ander verschil is dat we met semantische bewijzen wel kunnen laten zien dat een bepaalde redenering ongeldig is ($\Gamma \not\models A$, maar dat we dat 'aan de syntactische kant' niet kunnen: als het ons niet lukt om door symboolmanipulatie uit de rijtjes in Γ het rijtje A te maken, dan kan dat gewoon aan onze onhandigheid liggen.

Syntactische bewijzen maken het ons dus mogelijk om te laten zien dat een bepaalde redenering Γ/A bewijsbaar is. Wat we graag willen is natuurlijk dat als een redenering bewijsbaar is, zij dan ook geldig of waar is. Met andere woorden: we willen dat $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \models A$. Het is niet voor de hand liggend dat dit zo is! We kunnen natuurlijk een bewijssysteem maken waarin letterlijk alles te bewijzen is. In zo'n systeem zal niet aan bovenstaande wens worden voldaan. Een systeem dat dingen bewijst die niet waar zijn, noemen we inconsistent en is voor de logica niet interessant. Als een bewijssysteem wel aan deze eis voldoet heet het consistent of correct. Gelukkig bestaan er voor de propositielogica bewijssytemen waarvan de correctheid bewezen is. In het volgende hoofdstuk zullen we zo'n systeem leren kennen. Het bovenstaande staat bekend als de correctheidsstelling voor de propositielogica: consistent

Stelling 1.1. *Correctheidsstelling voor de propositielogica:* $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \models A$

Deze stelling geeft ons ook een manier om het probleem op te lossen dat onbewijsbaarheid $\Gamma \nvdash A$ niet syntactisch bewezen kan worden. De correctheidsstelling kan namelijk ook als volgt geformuleerd worden: $\Gamma \not\models A \Rightarrow \Gamma \nvdash A$ (contrapositie op meta-nivo —zie Stelling 3.12 uit Hoofdstuk 7). Dit zegt ons dat als we $\Gamma \not\models A$ kunnen aantonen, dat we daarmee dan tevens bewezen hebben dat A niet uit Γ afleidbaar is. Dit is de methode om onafleidbaarheid aan te tonen. contrapositie afleidbaarheid

We hebben echter ook de omgekeerde wens: als een redenering waar is, zou het wel erg prettig zijn als zij ook bewijsbaar is: $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$. Dit noemen we de volledigheid van een systeem: alles wat waar is, is ook bewijsbaar. Systemen die hier niet aan voldoen kennen dus formules of redeneringen die wel waar, maar niet bewijsbaar zijn. Gelukkig is de propositielogica een volledig systeem. Daarom beschikken we over de volledigheidsstelling voor de propositielogica: volledigheid volledigheidsstelling

Stelling 1.2. *Volledigheidsstelling voor de propositielogica:* $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$.

We kunnen de correctheids- en volledigheidsstelling samenvoegen en krijgen dan:

Stelling 1.3. *Correctheids- en volledigheidsstelling voor de propositielogica: In de propositielogica zijn geldigheid (waarheid) en afleidbaarheid (bewijsbaarheid) equivalent. Oftewel:* $\Gamma \models A \Leftrightarrow \Gamma \vdash A$.

N.B. De bewijzen voor deze stellingen zijn niet echt triviaal en worden dus uit consideratie met de lezer gemakshalve achterwege gelaten. Tot slot: als we nog eens kijken naar Stelling 3.11 uit Subparagraaf 7.3.3 dan zien we daar dat we redeneringen kunnen ombouwen tot tautologieën. Als we deze wetenschap combineren met bovenstaande stelling, realiseren we ons dat de propositielogica eigenlijk niets meer doet dan het bewijzen van tautologieën!

In de volgende twee paragrafen zullen we ons bezig houden met twee typen van semantische bewijzen. Paragraaf 2 gaat over bewijzen met waarheidstafels. Paragraaf 3 gaat over bewijzen met modellen. In Hoofdstuk 9 zullen we de syntactische bewijzen uitgebreid tegenkomen.

2. Bewijzen met waarheidstafels

Gelukkig weinig nieuws in deze paragraaf. Eigenlijk hebben we het allemaal al eens gezien, dus vooruit met de geit (hoezo 'geit' eigenlijk?).

We willen een methode hebben om te laten zien dat een redenering geldig is. Als de methode correct is, geeft deze dus een bewijs van de redenering. Eén van de beschikbare bewijsmethoden maakt gebruik van waarheidstafels. Laten we eenvoudig beginnen: we willen laten zien dat $p, q/p \wedge q$ een geldige redenering is, oftewel dat $p, q \models p \wedge q$. Dan moeten we dus volgens Definitie 2.2 uit Hoofdstuk 7 laten zien dat iedere valuatie V die zowel p als q waar maakt, ook $p \wedge q$ waar maakt. We weten dat de rijen in een waarheidstafel overeenkomen met de verschillende voor een formule relevante valuaties. We gaan nu gewoon een waarheidstafel maken waar zowel p, q als $p \wedge q$ in staan:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

We moeten nu controleren of het zo is dat altijd als p en q beide waar zijn, ook $p \wedge q$ waar is. Alleen in de laatste rij zijn p en q beide waar. Maar daar is ook $p \wedge q$ waar! De redenering is dus geldig, oftewel $p, q \models (p \wedge q)$ (is toch niet echt verbazingwekkend, hè?)

Dit eenvoudige voorbeeld laat precies zien hoe 'waarheidstafelbewijzen' gaan: maak een waarheidstafel waarin alle premissen en de conclusie staan. Kijk vervolgens naar alle rijen waar alle premissen waar zijn. Als in deze rijen de conclusie ook altijd waar is, hebben we met een geldige redenering te maken. Als er tenminste één rij is waar wel alle premissen waar zijn, maar de conclusie niet waar is, dan hebben we met een ongeldige redenering te doen: er is een valuatie die de premissen wel, maar de conclusie niet waar maakt. Zo'n valuatie heet om begrijpelijke redenen een tegenvoorbeeld (tegen de geldigheid van de redenering).

tegenvoorbeeld

Een wat ingewikkelder geval: is de redenering $p \rightarrow q$,$p \vee q$ / $\neg\neg q$ geldig? We maken een waarheidstafel waar alle drie de formules in staan (de premissen zijn vet gedrukt):

	p	q	$(p \rightarrow q)$	$(p \vee q)$	$(\neg q)$	$(\neg\neg q)$
	0	0	1	0	1	0
*	0	1	1	1	0	1
	1	0	0	1	1	0
*	1	1	1	1	0	1

Er zijn twee hypothesen. Deze zijn beide waar in de rijen die met een * gemerkt zijn. We zien dat in deze rijen $\neg\neg q$ ook waar is. We hebben dus weer met een geldige redenering te maken.

En nog een voorbeeld: is de redenering $(p \vee q)$, $(r \rightarrow \neg q)$, $\neg r$ / $(p \wedge \neg r)$ geldig? Het juiste antwoord wordt weer door een waarheidstafel geleverd:

	p	q	r	$(p \vee q)$	$(\neg q)$	$(r \to \neg q)$	$(\neg r)$	$(p \wedge \neg r)$
	0	0	0	1	1	1	1	0
	0	0	1	0	1	1	0	0
*	0	1	0	1	0	1	1	0
	0	1	1	1	0	0	0	0
*	1	0	0	1	1	1	1	1
	1	0	1	1	1	1	0	0
*	1	1	0	1	0	1	1	1
	1	1	1	1	0	0	0	0

We zien drie rijen waarin alledrie de premissen waar zijn. Echter, in de eerste van deze drie is de conclusie niet waar. Dus niet altijd als de premissen waar zijn, is de conclusie waar. De redenering is dus niet geldig. De valuatie V met $V(p) = V(r) = 0$ en $V(q) = 1$ is een tegenvoorbeeld tegen de redenering.

En dan tot slot nog eentje inclusief vertalingen. De opdracht is: bepaal of de volgende redenering geldig is:

Alleen als het zondag is, begin ik later te werken. Als ik niet later begin te werken, houd ik vroeger op. Ik kook uitgebreid als ik vroeger ophoud. Ik kook niet uitgebreid, dus het is zondag.

Vertaalsleutel: $p =$ het is zondag, $q =$ ik begin later te werken, $r =$ ik houd vroeger op, $s =$ ik kook uitgebreid

Vertaling: $q \to p$, $\neg q \to r$, $r \to s$, $\neg s$ / p

De waarheidstafel wordt:

	p	q	r	s	$(p \vee q)$	$(\neg q)$	$(r \to \neg q)$	$(\neg r)$	$(p \wedge \neg r)$
	0	0	0	0	1	1	1	0	1
	0	0	0	1	1	0	1	0	1
	0	0	1	0	1	1	1	1	0
	0	0	1	1	1	0	1	1	1
	0	1	0	0	0	1	0	1	1
	0	1	0	1	0	0	0	1	1
	0	1	1	0	0	1	0	1	0
	0	1	1	1	0	0	0	1	1
	1	0	0	0	1	1	1	0	1
	1	0	0	1	1	0	1	0	1
	1	0	1	0	1	1	1	1	0
	1	0	1	1	1	0	1	1	1
*	1	1	0	0	0	1	1	1	1
	1	1	0	1	0	0	1	1	1
	1	1	1	0	0	1	1	1	0
	1	1	1	1	0	0	1	1	1

Er is maar één rij waar alle premissen waar zijn (*). In die rij is ook de conclusie waar, dus de redenering is geldig. ('t Is wel benauwd typen hoor, in zo'n smal kolommetje, en dat op zondag. . .)

Uiteraard kunnen we met deze methode niet alleen laten zien dat een redenering geldig is, maar ook of een formule een tautologie is of een contradictie. Als we de waarheidstafel voor een formule maken en we zien dat onder de formule alleen maar enen staan, dan hebben we met een tautologie te maken. En andersom: als in de kolom onder de formule alleen maar nullen staan, is het een contradictie. Een voorbeeld van een waarheidstafel voor een tautologie hebben we al in Paragraaf 7.3.3. gezien.

Het laatste voorbeeld laat overigens wel een nadeel van deze bewijsmethode zien: als je veel premissen hebt die veel verschillende atomen bevatten, worden waarheidstafels al snel onhanteerbaar groot. Het zou prettig zijn om, zeker voor 'de grote gevallen', een andere bewijsmethode te hebben. En logica zou logica niet zijn als die methode er ook niet werkelijk was...

3. Bewijzen met modellen

In Paragraaf 7.3.2 hebben we de begrippen geldigheid en ongeldigheid gedefinieerd (Definitie 3.5 en 3.6). De drie voorbeelden die na deze definities volgden, toonden hoe je van een redenering kunt aantonen dat zij (on)geldig is. In deze paragraaf doen we dat nog eens dunnetjes over.

Een bewijs met modellen kan grofweg twee richtingen uitgaan. Stel dat we willen uitzoeken of de redenering A, B / C geldig is. Dan moet dus voor iedere valuatie V gelden dat als $V \models A$ en $V \models B$, dat dan ook $V \models C$. We kunnen nu gaan uitzoeken of inderdaad iedere valuatie die A en B waar maakt ook C waar maakt. We zoeken dan dus alle relevante valuaties op en hoeven alleen nog te controleren of in al deze gevallen C ook waar is. Er is echter ook een andere tactiek: we gaan zoeken naar een valuatie die A en B wèl waar maakt, maar die C niet waar maakt. Als het ons niet lukt om zo'n valuatie te vinden, dan is C dus altijd waar zodra A en B waar zijn en dus is de redenering geldig. We zeggen dat we bij deze laatste methode zoeken naar een tegenvoorbeeld. Als het niet lukt om een tegenvoorbeeld te vinden, is de redenering correct en andersom. Beide methoden hebben hun voordelen. De eerste is erg 'recht-toe-recht-aan' en daardoor duidelijk. Nadeel is wel dat je, als je pech hebt, veel verschillende valuaties moet checken (en moet opletten dat je er geen hebt overgeslagen). De tweede methode heeft dit nadeel niet. Je hoeft maar één tegenvoorbeeld te vinden om aan te tonen dat een redenering ongeldig is. Als dit niet lukt ben je meteen klaar. Nadeel van deze methode is dat het een beetje 'achterstevoren' is en daardoor soms verwarrend kan zijn. We gaan gewoon eens een redenering op beide manieren bewijzen:

tegenvoorbeeld

Voorbeeld: $p \to (q \vee r)$, $(\neg r \vee \neg p)$, $\neg q$ / $\neg p$.

Methode 1:

Stel dat voor een valuatie V geldt dat $V \models p \to (q \vee r)$ (i), $V \models (\neg r \vee \neg p)$ (ii) en $V \models \neg q$ (iii). Dan moet ook $V \models \neg p$ gelden.

Uit (i), met sem$\to$, volgt $V \not\models p$ of $V \models (q \vee r)$. Dit levert dus twee gevallen op. Met het eerste zijn we snel klaar: als $V \not\models p$ dan $V \models \neg p$ (sem$\neg$), dus dat gaat goed. Nu moet het ook nog goed gaan voor de valuaties die p wèl waar maken. Dan moet dus gelden dat $V \models (q \vee r)$. Dus $V \models q$ of $V \models r$ (sem$\vee$). We hebben weer twee mogelijkheden. De eerste is echter niet toegestaan, omdat volgens (iii) $V \models \neg q$ (er bestaan nog altijd geen valuaties die zowel q als $\neg q$ waar maken). Dus moet $V \models r$ het geval zijn. Nu kijken we naar (ii).

Uit (ii): $V \models \neg r$ of $V \models \neg p$ (sem$\vee$). Omdat we al hadden dat $V \models r$, moet dus $V \models \neg p$ het geval zijn. En dat is precies wat we wilden aantonen. We hebben nu alle mogelijke valuaties afgelopen, zonder op problemen te stuiten. De redenering is dus geldig.

Methode 2:

Stel dat de redenering niet geldig is. Dan moet er dus een tegenvoorbeeld zijn, oftewel een valuatie V zodat $V \models p \rightarrow (q \vee r)$ (i), $V \models (\neg r \vee \neg p)$ (ii) en $V \models \neg q$ (iii), maar tevens $V \not\models \neg p$ (iv).

Uit (iv), met sem$\neg$, volgt $V \models p$. Gecombineerd met (i) geeft dit (sem$\rightarrow$): $V \models (q \vee r)$. Omdat volgens (iii) $V \models \neg q$, volgt met sem$\vee$ dat $V \models r$. Uit (ii) tenslotte volgt dat $V \models \neg r$ of $V \models \neg p$. We hadden echter ook al dat $V \models r$ en $V \models p$. Dit is met elkaar in tegenspraak. Het is ons dus niet gelukt om een tegenvoorbeeld te vinden, dus de redenering is geldig.

Het is duidelijk dat beide methoden tot hetzelfde resultaat leiden. Welke methode de voorkeur verdient is een kwestie van smaak, routine en de specifieke opgave. Sommige opgaven zijn makkelijker op de ene manier te benaderen, andere op de andere manier. Het 'zien' van wat de beste methode is, is een kwestie van ervaring —logica is sowieso grotendeels een kwestie van oefenen, oefenen, oefenen. Vaak zal het niet zoveel uitmaken welke methode je gebruikt. Ter illustratie en 'leringh ende vermaeck' laten we gewoon nog wat voorbeelden volgen.

Voorbeelden:

I. Toon aan dat $(p \leftrightarrow \neg q), (q \vee r) \rightarrow p \models p$.

   Stel dat $(p \leftrightarrow \neg q), (q \vee r) \rightarrow p \not\models p$. We moeten dan een tegenvoorbeeld vinden, oftewel een valuatie V zodat $V \models (p \leftrightarrow \neg q)$ (i), $V \models (q \vee r) \rightarrow p$ (ii) en $V \not\models p$ (iii).

   Uit (iii) en (i), met sem$\leftrightarrow$: $V \not\models \neg q$. Nu met sem$\neg$: $V \models q$. Dan echter ook, volgens sem$\vee$: $V \models (q \vee r)$. Nu volgt met (ii) sem$\rightarrow$ dat $V \models p$. Maar volgens (iii) moesten we hebben dat $V \not\models$ p. Tegenspraak, dus we hebben geen tegenvoorbeeld. De redenering is inderdaad geldig.

II. Is de volgende redenering geldig: $p \leftrightarrow \neg q$, $q \rightarrow (\neg r \wedge p)$ / $\neg r \vee q$?

   Wil de redenering geldig zijn, dan moet voor iedere valuatie met $V \models p \leftrightarrow \neg q$ (i) en $V \models q \rightarrow (\neg r \wedge p)$ (ii) ook $V \models \neg r \vee q$ (iii) gelden. Hoe kan een valuatie V die de premissen waar maakt eruit zien? Dan uit (i) met sem$\leftrightarrow$: $V \models p$ en $V \models \neg q$ of $V \not\models p$ en $V \not\models \neg q$. Zij V nu de valuatie waarvoor geldt $V \models p$ en $V \not\models q$. Voor deze valuatie geldt $V \models (p \leftrightarrow \neg q)$ en met sem$\rightarrow$: $V \models q \rightarrow (\neg r \wedge p)$. Merk op dat we dus nu een valuatie hebben die de premissen waar maakt zonder dat we een uitspraak over r hebben hoeven doen. We mogen de valuatie van r dus nu zelf kiezen. Stel $V \models r$. Dan geldt met sem$\neg$: $V \not\models \neg r$. We hadden al $V \not\models q$, dus met sem$\vee$: $V \not\models \neg r \vee q$.

De door ons geconstrueerde valuatie V maakt de premissen waar maar de conclusie niet. Dit is dus geen geldige redenering.

III. Laat zien dat $p \leftrightarrow \neg q, q \to (\neg r \wedge p), \neg p \models \bot$.

Er van uitgaand dat deze redenering correct is, moeten we dus laten zien dat altijd als de premissen waar zijn, ook de conclusie waar is. Maar de conclusie is $\bot$ en dus altijd onwaar! Dit betekent dat de premissen nooit allemaal tegelijk waar kunnen zijn (stel dat de premissen ooit wel allemaal waar zouden zijn, dan zou $\bot$ ook waar moeten zijn)—dus dat ze een strijdige verzameling vormen (zie stelling 4.2 (ii)). Als we nu gaan proberen een valuatie te vinden die alle premissen waar maakt, moeten we dus op een tegenspraak stuiten.

Stel $V \models p \leftrightarrow \neg q$ (i), $V \models q \to (\neg r \wedge p)$ (ii) en $V \models \neg p$ (iii).

Uit (iii): $V \not\models p$ (sem$\neg$). Samen met (i) geeft dit $V \not\models \neg q$ (sem$\leftrightarrow$), dus $V \models q$ (sem$\neg$). Met (ii) gecombineerd: $V \models (\neg r \wedge p)$ (sem$\to$), dus o.a. $V \models p$ (sem$\wedge$). Tegenspraak met $V \not\models p$.

Merk overigens op dat we in plaats van $\bot$ willekeurig welke andere conclusie hadden kunnen trekken: uit het onware volgt immers alles!

IV. Vertaal de volgende redenering en onderzoek of deze geldig is:

De post brengt een brief, tenzij Anna opbelt of zelf komt. Als Anna opbelt dan brengt de post geen brief. Anna komt zelf alleen als de post een brief brengt. Dus Anna komt.

Vertaalsleutel: p = de post brengt een brief, q = Anna belt op, r = Anna komt zelf

Vertaling: $\neg p \leftrightarrow (q \vee r)$, $q \to \neg p$, $r \to p$ / r

We proberen een tegenvoorbeeld te vinden, dus een valuatie V met $V \models \neg p \leftrightarrow (q \vee r)$ (i), $V \models q \to \neg p$ (ii), $V \models r \to p$ (iii) en $V \not\models r$ (iv).

Stel dat $V \models \neg p$. Dan volgens (i) met sem$\leftrightarrow$: $V \models q \vee r$. We hebben nu (i) waar gemaakt. Gecombineerd met (iv) en sem$\vee$ levert dit $V \models q$. Dat geeft weer samen met (ii) $V \models \neg p$ (met sem$\to$). Nu hebben we (ii) waar gemaakt Dus $V \not\models p$ (sem$\neg$). Vervolgens geeft dit ons, door combinatie met (iii) en sem$\to$: $V \not\models r$. (iii) is nu ook waar. En $V \not\models r$ is precies wat we moesten hebben. We hebben nu een tegenvoorbeeld dus de redenering is ongeldig.

V. Tot slot een fraaie. Opdracht als bij (IV).

Nederlanders zoeken naar wettelijke mogelijkheden voor fiscale aftrekposten als ze naar fiscale aftrekposten zoeken. Als Nederlanders voor extra pensioenvoorzieningen kiezen, dan zijn ze rijk. Als Nederlanders niet rijk zijn en niet naar fiscale aftrekposten zoeken, dan kiezen ze niet voor extra pensioenvoorzieningen. Dus als Nederlanders niet voor extra pensioenvoorzieningen kiezen, dan zoeken ze niet naar wettelijke mogelijkheden voor fiscale aftrekposten of zijn ze niet rijk.

Vertaalsleutel: p = Nederlanders zoeken naar wettelijke mogelijkheden voor fiscale aftrekposten, q = Nederlanders zoeken naar fiscale aftrekposten r =

Nederlanders kiezen voor extra pensioenvoorzieningen $s =$ Nederlanders zijn rijk

Vertaling: $q \to p$, $r \to s$, $(\neg s \wedge \neg q) \to \neg r$ / $\neg r \to (\neg p \vee \neg s)$

We zoeken maar weer een tegenvoorbeeld. Dus een valuatie V zodat $V \models q \to p$ (i), $V \models r \to s$ (ii), $V \models (\neg s \wedge \neg q) \to \neg r$ (iii) en $V \not\models \neg r \to (\neg p \vee \neg s)$ (iv).

Uit (iv) met sem$\to$: $V \models \neg r$ (v) en $V \not\models (\neg p \vee \neg s)$ (vi). Uit (vi) met sem$\vee$: $V \not\models \neg p$ en $V \not\models \neg s$. Dus (sem$\neg$): $V \models p$ en V$\models s$ (vii). Door (vii) worden (i) en (ii) automatisch waar gemaakt (sem$\to$). Nu moeten we kijken of (iii) waar is. Hier zorgt (v) voor (ook sem$\to$). We hebben een tegenvoorbeeld dus de redenering is ongeldig.

VI. Ach, vooruit, nog eentje dan. Opdracht idem dito meer van hetzelfde. (introducing the fabulous vakgroep logica...)

Als Dirk lacht, dan lachen Marc en Albert. Als Karst lacht of Dirk niet lacht, lacht Albert niet. Als Frans lacht, lacht Karst. Dus als Frans lacht, lacht Dirk niet.

Vertaalsleutel: $d =$ Dirk lacht, $m =$ Marc lacht, $a =$ Albert lacht (veelvuldig zelfs), $k =$ Karst lacht, $f =$ Frans lacht.

Vertaling: $d \to (m \wedge a)$, $(k \vee \neg d) \to \neg a$, $f \to k$ / $f \to \neg d$

Stel dat de redenering niet geldig is. Er is dan een tegenmodel dat de premissen waar en de conclusie onwaar maakt. Dus o.a. $V \not\models f \to \neg d$. Met sem$\to$ volgt: $V \models f$ (i) en $V \not\models \neg d$. Met sem$\neg$: $V \models d$ (ii). Uit (i) en de waarheid van de 3e premisse: $V \models k$ (sem$\to$). Met sem$\vee$ volgt hieruit dat $V \models (k \vee \neg d)$. Samen met de 2e premisse: $V \models \neg a$ dus $V \not\models a$ (sem$\to$ en sem$\neg$) (iii). Uit (ii) en de 1e premisse: $V \models (m \wedge a)$, dus met sem$\wedge$ o.a. $V \models a$. Tegenspraak met (iii). Dus de redenering is geldig.

Genoeg voorbeelden. Het zal misschien opvallen dat de tegenvoorbeeldmethode tamelijk trefzeker is —en vaak kort. Zeker als een redenering ongeldig is, werkt deze methode i.h.a. het best. Het zal ook opvallen dat je bij het maken van een bewijs niet persé van links naar recht de formules afwerkt. Het zou niet fout zijn om dat wel te doen (alle wegen leiden naar het Rome van de oplossingen), maar vaak kan het korter. Het is zaak om zo snel mogelijk zo sterk mogelijke conclusies te trekken: ieder stukje conclusie is een nieuw stuk gereedschap bij het maken van de rest van het bewijs.

Als bijvoorbeeld gegeven is dat $V \not\models p \wedge q$ en $V \models r \wedge s$, dan is het verstandig om met de tweede uitspraak te beginnen. Deze vertelt je namelijk dat $V \models r$ en $V \models s$, terwijl de eerste alleen maar zegt dat $V \not\models p$ of $V \not\models q$. De conclusie die je uit de tweede uitspraak kunt trekken is dus veel sterker dan die uit de eerste. Om dezelfde reden is $V \not\models p \vee q$ 'plezieriger' dan $V \models p \vee q$. Idem met $V \not\models p \to q$ en $V \models p \to q$. Alle waarheidstafels (behalve die voor de $\leftrightarrow$ en de $\neg$) hebben drie plaatsen die hetzelfde zijn (0 of 1) en één die anders is (1 of 0). De 'plezierige' uitspraken komen nu precies overeen met die ene 'solitaire' toestand in de waarheidstafel. Het is ook niet zo verwonderlijk dat deze toestanden bewijstechnisch prettig zijn: de $\wedge$

bijvoorbeeld kan op drie manieren onwaar zijn, maar slechts op één manier waar—het is wel voor de hand liggend dat deze toestand meer informatie oplevert dan het 'één van de drie toestanden' geval (aiaiai, dit is toch geen fatsoenlijk Nederlands meer —het is ook al half zes in de ochtend).

Goed, dit klinkt wellicht allemaal rather complicated, maar dat valt wel mee hoor. Gewoon veel oefenen, dan wordt het vanzelf wel duidelijk. Er is nog nooit een heuristiek bedacht die oefening overbodig maakt (helaas), dus...

4. Samenvatting

$\Gamma \models A$ betekent 'Γ maakt A waar'. Waarheid is een semantisch begrip.

$\Gamma \vdash A$ betekent 'Γ bewijst A' of 'A is afleidbaar uit Γ'. Afleidbaarheid is een syntactisch begrip.

Stelling 1.1: Correctheidsstelling voor de propositielogica: $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \models A$.

Stelling 1.2: Volledigheidsstelling voor de propositielogica: $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$.

Stelling 1.3: Correctheids- en volledigheidsstelling voor de propositielogica: In de propositielogica zijn geldigheid (waarheid) en afleidbaarheid (bewijsbaarheid) equivalent. Oftewel: $\Gamma \models A \iff \Gamma \vdash A$.

Tegenvoorbeeld: Een tegenvoorbeeld tegen een redenering is een valuatie V die de premissen van de redenering waar maakt en de conclusie onwaar.

5. Opgaven

Bewijzen met waarheidtafels (maak bij onderstaande opgaven gebruik van de in Paragraaf 8.2 beschreven bewijsmethode):

1. Vertaal de onderstaande redeneringen in de taal van de propositielogica (vergeet de vertaalsleutel niet). Onderzoek met waarheidstafels de (on)geldigheid van deze redeneringen.

   i. Als Jan of Richard lacht, dan lacht Marjan. Dus, als Jan lacht, dan lacht Marjan.

   ii. Het is niet het geval dat: Albert lacht terwijl het niet zo is dat Henk of Richard lacht. Het is niet zo dat Marjan of Diane lacht. Als Dirk lacht dan lacht Marjan of Thea. Dus, Thea lacht niet en Richard lacht niet of het is niet zo dat Dirk of Albert lacht.

   iii. Dr. Jansen houdt van fenomenologie of cryptologie. Hij houdt van astrologie of fenomenologie. Hij houdt niet van astrologie. Dus houdt hij van cryptologie.

   iv. Als Jansen overgewerkt heeft is de moord gisteren gepleegd. Als Pietersen overgewerkt heeft, dan is de moord vandaag gepleegd. Dus Jansen en Pietersen hebben niet allebei overgewerkt.

v. Alleen als de milieuvervuiling afneemt, terwijl de bevolkingsaanwas vermindert, hebben we een kans om te overleven. Volgens deskundigen zal de milieuvervuiling niet afnemen, of de bevolkingsaanwas niet verminderen, tenzij de bereidheid aanwezig is om snel indringende maatregelen te nemen. De bereidheid om snel indringende maatregelen te nemen is echter niet aanwezig. Dus hoewel de bereidheid om snel indringende maatregelen te nemen niet aanwezig is, hebben we een kans om te overleven.

vi. Joost is een goede huisknecht terwijl Tom Poes een positieve invloed op O.B. Bommel heeft of anders is O.B. Bommel een alcoholist. Alleen als O.B. Bommel geen alcoholist is, is hij een heer van stand. Tom Poes heeft geen positieve invloed op O.B. Bommel of Joost is geen goede huisknecht. Dus O.B. Bommel is geen heer van stand.

vii. O.B. Bommel spreekt in de Kleine Club mits Tom Poes of Joost op de oude schicht passen. Alleen als Joost op de oude schicht past, dan past Tom Poes niet op de oude schicht. Dus O.B. Bommel spreekt in de Kleine Club.

2. Maak waarheidstafels voor de volgende redeneringen en toon er de (on)geldigheid van aan. Laat bij ongeldige redeneringen duidelijk zien welke valuatie een tegenvoorbeeld is.

   (i) $p \to \neg\mathrm{q}$, $q \vee (q \to p)$, $\neg(q \wedge p)$ / $p \leftrightarrow \neg\mathrm{q}$

   (ii) $p \leftrightarrow q$, $\neg(q \wedge \neg\mathrm{p})$, q / p

   (iii) $\neg p \to (q \wedge r)$, $\neg(q \vee p) \vee r$, $p \leftrightarrow \neg\mathrm{q}$ / $(p \wedge r) \vee q$

   (iv) $p \to \neg q$, $q \to \neg r$, $r \to \neg p$ / $p \vee (q \vee r)$

   (v) $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow r$, $(r \vee \neg p) \wedge \neg q$, $r \to q$ / $(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg r$

Bewijzen met modellen (maak bij onderstaande opgaven, voor zover van toepassing, gebruik van de in Paragraaf 8.3 beschreven bewijsmethode:

3. Onderzoek de (on)geldigheid van de redeneringen uit opgave 4 van Hoofdstuk 6.

4. Bewijs, met modellen, de redeneringen uit opgave 1.

5. Bewijs, met modellen, de redeneringen uit opgave 2.

6. Vertaal onderstaande redeneringen in de taal van de propositielogica (en vergeet de vertaalsleutel niet). Ga na of ze geldig zijn.

   i. Uit de nutteloosheid van maatschappelijk werkers in achterbuurten en evenzeer in de luxe woonwijken volgt dat ze nuttig gebruikt kunnen worden in modale inkomenswijken. Maar maatschappelijk werkers kunnen niet nuttig gebruikt worden in modale inkomenswijken, zelfs al zijn ze niet nuttig in de luxe woonwijken. Dus is het niet zo dat maatschappelijk werkers aan geen enkele sociale groepering kunnen bijdragen en dat ze noch in de achterbuurten, noch in de stadsvernieuwingsgebieden nuttig zijn.

ii. Het recombineren van DNA kan sociaal acceptabel zijn, maar we moeten eerst de sociale implicaties van DNA recombinatie en de geestelijke gezondheidszorg overzien. Dus kan het recombineren van DNA niet sociaal acceptabel zijn.

iii. Om kunstmatige intelligentie (AI) te studeren is een sterk wiskundige achtergrond vereist en bovendien moet men ook een redelijke kennis van informatica hebben. Tevens is kennis van neurale netwerken tezamen met een volledige beheersing van de logica wenselijk. Dientengevolge is een sterk wiskundige achtergrond vereist als je AI wilt studeren, en je moet ook een redelijke kennis van informatica en een volledige beheersing van de logica hebben.

iv. Op het partijcongres heeft Brolitswitz niet het juiste ideologiebegrip, evenmin als Harlwatsz en bovendien weet Drarlkoff niet waar hij over praat of Brolitswitz heeft het juiste ideologiebegrip of Drarlkoff weet waar hij over praat of we moeten zorgvuldig luisteren naar Tilkrwitsz. Dus Harlwatsz heeft het juiste ideologiebegrip of we moeten zorgvuldig luisteren naar Tilkrwitsz.

v. Als de paddestoelen opkomen en het kouder wordt, dan wordt het herfst. Als het herfst wordt, dan worden de dagen korter. Hoewel de nachten niet langer worden, wordt het kouder. Dus er komen geen paddestoelen op.

vi. Vrouwen zijn voor een nieuwe abortuswetgeving, tenzij de vrouw niet zelf beslist en abortus niet in het ziekenfondspakket wordt opgenomen. Vrouwen die voor een nieuwe abortuswetgeving zijn, zijn feministen. Als het CDA blijft regeren, dan is het niet zo dat de vrouw zelf beslist of abortus in het ziekenfondspakket wordt opgenomen. Alleen als het CDA blijft regeren, zijn vrouwen die voor een nieuwe abortuswetgeving zijn feministen. Dus vrouwen zijn feministen en voor een nieuwe abortuswetgeving als het CDA blijft regeren.

vii. Als vorderen heel vaak niet zal lukken, dan is de bijdrage aan de bestrijding van de woningnood van een behoorlijke leegstandswetgeving en uitgebreide vorderingsmogelijkheden minuscuul of negatief. Als vorderen meestal wel zal lukken, dan zal een leegstandswetgeving leiden tot verdere daling van de woningbouw. Als een leegstandswetgeving zal leiden tot verdere daling van de woningbouw dan is de bijdrage aan de bestrijding van de woningnood van een behoorlijke leegstandswetgeving en uitgebreide vorderingsmogelijkheden minuscuul of negatief. Dus is de bijdrage aan de bestrijding van de woningnood van een behoorlijke leegstandswetgeving en uitgebreide vorderingsmogelijkheden minuscuul of negatief.

7. Bewijs de (on)geldigheid van de volgende redeneringen:

i. $p \vee q$, $\neg(p \leftrightarrow q)$ / $p \leftrightarrow \neg q$

ii. $p \to \neg q$, $q \vee \neg\neg p$ / $\neg p \wedge q$

iii. $p \leftrightarrow \neg r$, $r \to q$ / $\neg q \to p$

iv. $p \vee (q \vee r)$, $(q \wedge p) \to \bot$ / $\neg r \to (p \leftrightarrow \neg q)$

v. $p \wedge (q \vee r)$, $(q \wedge p) \rightarrow \bot$ / $r \rightarrow q$

vi. $p \rightarrow \neg(q \wedge r)$, $q \rightarrow (p \wedge r)$, $q \vee \neg r$ / $\neg p \wedge (\neg q \wedge \neg r)$

vii. $p \rightarrow \neg(q \wedge r)$, $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$ / $p \leftrightarrow \neg(q \wedge r)$

viii. $r \rightarrow (p \leftrightarrow q)$, $(p \vee q)$, $\neg(\neg p \wedge r)$, $((p \wedge q) \rightarrow r)$ / $r \rightarrow (p \wedge q)$

ix. $q \rightarrow r$, $\neg(\neg p \wedge r)$, $p \vee q$ / p

x. $q \rightarrow r$, $\neg p \wedge r$, $p \vee q$, $q \rightarrow p$ / $r \leftrightarrow \neg(\neg q \rightarrow p)$

8. De rechter zegt tegen de de beklaagde: "Als u schuldig bent, dan had u een medeplichtige". Hierop roept de advocaat: "Dat is niet waar!".
   Waarom is de opmerking van de advocaat niet zo slim?

9. Er is een eiland waar alleen nobelen en schurken wonen. Nobelen spreken altijd de waarheid en schurken liegen altijd. Een reiziger ontmoet twee inwoners X en Y van dit eiland en vraagt of ze nobelen of schurken zijn. Hierop zegt X: "Ik ben een schurk of Y is een nobele". Wat zijn X en Y?

10. We zijn nog op het eiland der nobelen en schurken. Dezelfde reiziger ontmoet drie autochtonen X, Y en Z. X zegt: "Wij zijn alledrie schurken". Y zegt: "Precies één van ons is een nobele". Bepaal wat X, Y en Z zijn.

11. Tweedledum en Tweedledee spreken de waarheid en liegen op een systematische manier. Een van beiden liegt op maandag, dinsdag en woensdag en spreekt op de andere dagen de waarheid. De ander liegt op donderdag, vrijdag en zaterdag en spreekt de waarheid op de overige dagen. Op een dag ontmoet Alice (die van Wonderland) de tweeling. Ze lijken zo op elkaar dat zij ze niet onderscheiden kan. De eerste zegt: "Ik ben Tweedledum", de tweede zegt: "Ik ben Tweedledee". Wie zijn nummer één en twee werkelijk?

12. Enige dagen later komt Alice weer één van bovengenoemde tweeling tegen, die zegt: "Ik lieg vandaag en ik ben Tweedledee". Wie ontmoette ze?

HOOFDSTUK 9

Natuurlijke deductie

1. Een oude vertelling

In dit hoofdstuk zullen we een puur syntactisch bewijssysteem leren kennen. Dat betekent dat we ons niet meer met betekenissen, valuaties en modellen zullen bezig houden (... en zij slaakten een zucht van opluchting), maar met pure symboolmanipulatie. Het systeem dat we zullen beschouwen heet 'natuurlijke deductie' of kortweg ND. Ter inleiding een korte historie over Achilles ('the ancient Greek warrior'), de Schildpad (met wie Achilles ooit een hardloopwedstrijd heeft gehouden) en een andere oude bekende.

Achilles komt de Schildpad tegen bij de lift in het bestuursgebouw.

A: Ha vriend Schildpad! Sta je hier al lang?

S: Goedemiddag vriend Achilles! Ja, ik sta hier al 5 minuten op een lift te wachten en vanmorgen kwam er al één na 2 minuten.

A: Ja, ik weet 't; ze hadden dit gebouw plat moeten neerleggen. Overigens paste je daarnet logica toe—dat was een conjunctie.

S: O ja? Dat college heb ik nog niet gehad. Ik ben bang dat dat te ingewikkeld is voor mijn kleine denkraam.

A: Welnee! Logica is eigenlijk een nogal triviaal vak. Dat met die conjunctie bijvoorbeeld zit zo: je plakt twee uitspraken aan elkaar met 'en'.

S: Ach, is dat alles? Dat kan ik ook wel met 'of': mijn schild is bruin of het is groen.

A: Ja, dat kan wel, maar het betekent wel iets anders.

S: Betekenen? Wie praat hier over betekenen? Je praat toch maar wat!

A: Nee, nee! Jij begon met te zeggen 'ik sta hier al 5 minuten op een lift te wachten en vanmorgen kwam er al één na 2 minuten'. Daar bedoelde je mee dat je hier nu al 5 minuten staat te wachten en dat er vanmorgen al na 2 minuten een lift kwam.

S: Ja, natuurlijk! Maar met 'mijn schild is bruin of het is groen' bedoel ik dat mijn schild bruin is of dat het groen is. Ik zie geen verschil tussen 'en' en 'of'. Je gebruikt ze toch op precies dezelfde manier.

A: Tja, daar zit wel wat in. Zouden 'en' en 'of' dan toch hetzelfde betekenen? Ik heb dat altijd een beetje verdacht gevonden.

Op dat moment komt toevallig Olivier B. Bommel langs, die, zoals oplettende lezertjes wel zullen weten, een rijzende ster is aan het logica-firmament.

B: Goedemiddag, jonge vrienden. Ik hoorde daar een Buitengewoon Belangwekkende Stelling, zoals mijn goede vader zou zeggen. Laten we daar eens een goed gesprek over hebben. Eens kijken… In mijn rechter jaszak zitten de sleuteltjes van de oude Schicht en in mijn linker jaszak een abacus. Zou jij, Achilles, mij kunnen vertellen wat je nu van me weet?

A: Zeker! In je rechter zak zitten sleuteltjes en…

B: Stop, jonge vriend. Schildpad, wat weet jij?

S: Hmm, zeker weer een strikvraag. Daar doe ik niet aan mee hoor!

B: Wind je niet zo op; ik bedoel er niets mee. Geef nou gewoon antwoord.

S: Nou ja, nogal makkelijk, dat in je linker zak een abacus zit.

B: Goed zo, zie je wel dat logica niet zo moeilijk is. Wat we nu hebben gedaan, is laten zien, dat als je twee dingen weet, dat je dan ook één van de twee weet. In de logica zeg je dan dat uit $A \wedge B$ de uitspraak A volgt, maar tegelijkertijd volgt uit $A \wedge B$ de uitspraak B.

A: Zie je wel, dat zei ik toch al!

B: Laten we nog even verder gaan. Uit $A \wedge B \wedge C$ volgt ook A en tevens B —daar zijn we het toch wel mee eens, hoop ik? Maar betekent daarom $A \wedge B$ hetzelfde als $A \wedge B \wedge C$?

S: Nee, dat lijkt me toch niet.

A: Nee, want als je $A \wedge B \wedge C$ weet, dan weet je toch meer, dan wanneer je alleen maar $A \wedge B$ weet?

B: Goed zo, Achilles! Jij wordt nog wel eens een goede logicus.

A: (gevleid door de woorden van O.B.B.) Laat mij eens proberen. Stel dat 'C' staat voor 'heer Bommel is bevriend met Plato'. Dan zou ik ook nog moeten weten dat U bevriend bent met Plato voordat ik $A \wedge B \wedge C$ mag beweren.

S: Ik snap 't. Om een conjunctie te mogen beweren moet je van te voren al beide conjuncten weten.

A: (die nu niet meer te stuiten is) En als je een conjunctie weet, dan weet je ook ieder conjunct afzonderlijk!

B: Goed zo, jonge vrienden. Ik merk 't al —jullie hebben talent. Laten we het nu eens als logica weergeven:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

In de linker regel wordt de '$\wedge$' geïntroduceerd en in de twee andere regels wordt de '$\wedge$' geëlimineerd. Door deze regels wordt het gebruik van de $\wedge$ eigenlijk vastgelegd. Je kan de conjunctie dus op twee manieren bekijken: ten eerste zijn er de condities waaronder $A \wedge B$ terecht beweerd mag worden. ten tweede zijn er de gevolgen die uit de bewering $A \wedge B$ voortvloeien. Eigenlijk geldt ditzelfde principe voor alle beweringen. De slagzin is hier 'Meaning is Use'.

A: (bewonderend tegen Schildpad) Hij spreekt nog Engels ook!

S: (negeert de dweperij van Achilles) Laat mij nu eens op z'n Bommels te werk gaan. Hier hebben we een nieuw voegteken: $\#$, en de introductie- en eliminatieregels zijn als volgt:

$$\frac{A}{A \# B} \qquad\qquad \frac{A \# B}{B}$$

A: (weet niet meer hoe hij het heeft, in het gezelschap van zoveel geleerdheid) Knap hoor, zomaar nieuwe voegtekens maken! En je hebt nog niet eens logica gehad.

B: Toch valt hier wel iets merkwaardigs op te merken. Met de regels van schildpad kan ik bewijzen dat John F. Kennedy dezelfde persoon is als Marilyn Monroe. Kijk maar:

Ik ben Olivier B. Bommel

Ik ben Olivier B. Bommel $\#$ John F. Kennedy is Marilyn Monroe

John F. Kennedy is Marilyn Monroe

De premisse is waar, dus, als de regels van Schildpad kloppen,. is de conclusie dat ook. In het algemeen geldt dat met Schildpad's systeem iedere B uit iedere A afleidbaar is. Met ander woorden: Schildpad's systeem is inconsistent. (Schildpad kijkt hevig teleurgesteld)

A: (kijkt zichtbaar opgelucht: Schildpad is dus toch niet zo knap) Geen wonder! Bij $A \# B$ heeft wat je erin stopt niets te maken met wat je eruit haalt.

B: Precies, er moet een harmonie zijn tussen de introductie- en eliminatieregels. Of, anders gezegd: men kan geen conclusies trekken dan alleen op grond van de conditie waaronder de bewering gedaan mag worden. Dat is overigens van Prawitz, een goede vriend van ons aller Prlwytzkofsky. De conclusie van B uit $A \# B$ is niet gerechtvaardigd op grond van de conditie voor $A \# B$, namelijk A! Dit zit gelukkig goed bij de regels voor de '$\wedge$'.

S: (zucht nog eens) Ik geef het op. Ik moet toch maar eerst de cursus logica gaan volgen. Maar daar is de lift eindelijk; ik zie jullie straks wel bij de koffie.

2. De eerste stapjes ...

2.1. De conjunctie. Bovenstaand verhaaltje laat al aardig zien waar het hier om gaat. We kijken nog eens naar de regels die O.B. Bommel ons voor de $\wedge$ gaf (N.B. uit de voorgaande context zal het duidelijk zijn geworden dat we deze regels van boven naar beneden moeten lezen):

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

Laten we eens proberen hier de 'logica' van in te zien (pfff, wat een woordspeling). We willen ons niet bezig houden met betekenis, maar uitsluitend met rijtjes symbolen. Welnu, zowel $A \wedge B$ als A en B zijn rijtjes symbolen (A en B kunnen immers voor hele formules staan). Als we het rijtje A en het rijtje B hebben, wat kunnen we dan beweren? Dat we $A \wedge B$ hebben natuurlijk. Met andere woorden: uit het rijtje A en het rijtje B mogen we het rijtje $A \wedge B$ maken. Maar ook andersom: als we het rijtje $A \wedge B$ hebben, wat weten we dan? Dat we zowel A als B hebben! (is toch niet echt moeilijk, hè?)

We zien hier twee dingen tegelijk gebeuren. Aan de ene kant houden we ons, zoals we wilden, strikt bezig met betekenisloze rijtjes symbolen (ziet iemand hier een valuatie o.i.d. staan?). Aan de andere kant gebruiken we regels die 'goed' werken —waarbij 'goed' betekent: in overeenstemming met de betekenis van de conjunctie. De volgende regel is duidelijk fout:

$$\frac{A}{A \wedge B}$$

We beweren dan namelijk dat we uit A de formule $A \wedge B$ kunnen afleiden. Maar als ik zuurkool eet, weet ik toch helemaal nog niet dat ik zuurkool met worst eet? Het komt erop neer, dat we willen dat onze syntactische afleidingsregels corresponderen met de betekenis van de voegtekens, zoals die door de semantiek is vastgelegd. Alleen op die manier is de correctheid van ons afleidingssysteem gegarandeerd. De regels van O.B.B. voldoen hier aan: als we zowel A als B hebben, mogen we $A \wedge B$ concluderen. En andersom: als we $A \wedge B$ hebben mogen we zowel A als B concluderen. Dit correspondeert met de regel $V \models A \wedge B$ desda $V \models$ A en $V \models$ B. We zullen zien dat we een dergelijk stel regels voor ieder voegteken kunnen vinden.

Nu zou iemand zich terecht kunnen afvragen waarom we dan niet de volgende regel voor de $\wedge$-eliminatie hebben:

$$\frac{A \wedge B}{A \quad B}$$

oftewel: uit $A \wedge B$ halen we zowel A als B. Op zich is dit een prima regel, die netjes overeenkomt met onze semantiek. De reden dat we dit soort regels toch niet gebruiken, is dat hij twee conclusies heeft, terwijl we graag willen dat afleidingen maar één conclusie hebben. Stel dat je wilt bewijzen dat $A \wedge B \vdash A$. We kunnen dat makkelijk doen met de regels van heer Olivier: we gebruiken dan gewoon één van zijn eliminatieregels en zijn dan klaar. Met de bovenstaande regel hebben we echter een probleem: we krijgen zowel de conclusie A als de conclusie B —terwijl we alleen maar A wilden hebben. We kunnen die B natuurlijk negeren, maar bij langere bewijzen blijven er dan overal conclusies 'in de lucht hangen' en dat is toch niet echt netjes (en bovendien onoverzichtelijk). Dus gebruiken we maar O.B.B.'s regels—maar merk wel op dat het dan nodig is om twee $\wedge$-eliminatieregels te hebben: we willen de linkerkant van de conjunctie kunnen concluderen, maar ook de rechterkant.

We kunnen nu al onze eerste wat serieuzere natuurlijke deductie bewijs maken. We gaan de commutativiteit van de $\wedge$ bewijzen, dus: $A \wedge B \vdash B \wedge A$. Het bewijs gaat als volgt:

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge\mathrm{E}}{B \wedge A}\,\wedge\mathrm{I}$$

Naast de afleidingsstappen is steeds aangegeven om welke stap het gaat: $\wedge$I staat voor $\wedge$-introductie, $\wedge$E voor . We zien dat onze hypothese (premisse) $A \wedge B$ bovenaan het bewijs verschijnt. Dat gaat altijd zo bij ND: hypothesen staan (relatief) bovenaan en hebben dus niets 'boven zich'. Dat is ook wel logisch: een hypothese is aangenomen en hoeft dus nergens uit afgeleid te worden. Wat verder opvalt is dat de hypothese twee keer voorkomt: je mag een hypothese zo vaak gebruiken als je wilt —uiteraard: als ik zuurkool eet, is het ook zo dat ik zuurkool eet, dat ik zuurkool eet en dat ik zuurkool eet (etc.). Bij het maken van een tafel mag je je hamer toch ook vaker dan één keer gebruiken? Hypothesen zijn bij ND eigenlijk niets meer dan het gereedschap waarmee je je conclusie 'in elkaar spijkert' (of misschien zijn de hypothesen de planken en de afleidingsregels het gereedschap... Nou ja, dit soort beeldspraken gaat altijd wel een beetje mank —als je het idee maar snapt).

$\wedge$-introductie
$\wedge$-eliminatie
hypothese

Dit voorbeeldje laat ook al zien dat we bij ND te maken hebben met boomstrukturen —in dit geval een boompje met twee takjes (de twee $\wedge$-eliminatie stappen). Alle ND-regels hebben één of meer 'ingangen' (boven de streep) en precies één uitgang (de conclusie onder de streep). Door dit soort structuren op te stapelen ontstaan vanzelf bomen. Een volledig ND-bewijs zal dan een boom zijn, waarvan de 'wortel' de conclusie van het bewijs is (hierboven dus $B \wedge A$ en de 'blaadjes' de hypothesen $A \wedge B$. Eigenlijk is dus iedere ND-stap in z'n eentje al een kleine natuurlijke deductie! De formules die tussen de blaadjes en wortel staan, zijn de tussenstappen in het bewijs. Een voorbeeld waarin al dit fraais goed tot z'n recht komt:

boomstructuren

Voorbeeld: We bewijzen de associativiteit van de $\wedge$: $A \wedge (B \wedge C) \vdash (A \wedge B) \wedge C$.

associativiteit

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{A}\,\wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{\dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{B \wedge C}\,\wedge\mathrm{E}}{B}\,\wedge\mathrm{E}}{A \wedge B}\,\wedge\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{B \wedge C}\,\wedge\mathrm{E}}{C}\,\wedge\mathrm{E}}{(A \wedge B) \wedge C}\,\wedge\mathrm{I}$$

Ga zelf na hoe deze deductie tot stand is gekomen.

Voor we ons nu te veel vermoeien met abstracte beschouwingen, moeten we eerst nog maar een paar ND-regels bekijken. We herhalen even de regels voor $\wedge$-introductie en -eliminatie.

2.2. De disjunctie. We gaan nu op zoek naar regels voor de $\vee$. Ook nu willen we een regel die de $\vee$ introduceert en een regel die de $\vee$ elimineert: we willen rijtjes van de vorm $A \vee B$ kunnen maken en kunnen 'afbreken'. De $\vee$-introductie is niet moeilijk. Wanneer weet ik dat ik $A \vee B$ heb? Als ik A heb of als ik B heb. Dus als

$\vee$-introductie

ik A heb, mag ik $A \vee B$ concluderen, maar ook als ik B heb. Dat is precies wat de $\vee$-introductie doet:

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad\qquad \frac{B}{A \vee B}$$

We hadden natuurlijk ook een regel kunnen verzinnen als:

$$\frac{A \quad B}{A \vee B}$$

Uiteraard is het zo dat we, als we A en B hebben, zeker wel $A \vee B$ mogen concluderen. Maar als we A en B hebben kunnen we iets veel sterkers concluderen, n.l. $A \wedge B$. We willen dat onze regels zo sterk mogelijk zijn. Dat betekent dat we een zo sterk mogelijke conclusie uit onze hypothesen willen trekken. En weten dat je A en B hebt is nu eenmaal 'sterker' ('meer') dan weten dat je A of B hebt. Daarom is de conclusie in bovenstaande regel te zwak. Dit sterkte/zwakte probleem kun je ook op een andere manier bekijken: de $\vee\uparrow$-introductie gebruikt maar één hypothese, terwijl onze alternatieve regel er twee gebruikt. Een afleiding met één hypothese is sterker dan een afleiding met twee hypothesen, dus verdient de eerste regel de voorkeur. (Dat afleidingen met minder hypothesen sterker zijn dan die met meer is niet moeilijk in te zien: stel je voor dat je een afleiding maakt, waarin je alle mogelijke formules (FOR dus) als hypothesen gebruikt. Zo'n afleiding is toch niet 'sterk' te noemen —je hebt namelijk alles al, dus er valt zelfs niets meer af te leiden. Het is knapper om een tafel met één hamer en één zaag te maken, dan met een schuur vol gereedschap.)

Voorbeeld: We kunnen weer een paar eenvoudige deducties maken. We maken afleidingen voor achtereenvolgens $(A \wedge B) \vdash (A \vee B)$, $(A \wedge B) \vdash (B \vee A)$, $(A \wedge B) \vdash (A \vee B) \wedge (B \vee A)$ en $(A \wedge B) \vdash A \vee (((C \to D) \wedge B) \vee E)$ (nee, logisch gezien zijn deze bewijzen inderdaad niet interessant of informatief. Maar wellicht zijn ze wel illustratief en daar gaat het maar even om ('didactiek' heet dat).).

i. $(A \wedge B) \vdash (A \vee B)$

We geven twee alternatieve bewijzen:

$$\cfrac{\cfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge E}{A \vee B}\,\vee I \qquad\qquad \cfrac{\cfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge E}{A \vee B}\,\vee I$$

ii. $(A \wedge B) \vdash (B \vee A)$

$$\cfrac{\cfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge E}{B \vee A}\,\vee I \qquad\qquad \cfrac{\cfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge E}{B \vee A}\,\vee I$$

iii. $A \wedge B \vdash (A \vee B) \wedge (B \vee A)$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge\mathrm{E}}{A \vee B}\,\vee\mathrm{I} \qquad \cfrac{\cfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge\mathrm{E}}{B \vee A}\,\vee\mathrm{I}}{(A \vee B) \wedge (B \vee A)}\,\wedge\mathrm{I}$$

iv. $(A \wedge B) \vdash A \vee (((C \to D) \wedge B) \vee E)$

$$\cfrac{\cfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge\mathrm{E}}{A \vee (((C \to D) \wedge B) \vee E)}\,\vee\mathrm{I}$$

Laat deze even goed tot je doordringen! Als je 't niet vertrouwt, maak je maar een semantisch bewijs. Dit soort vreemde dingen zullen we nog wel vaker (en vreemder) tegenkomen. Maar als de regels kloppen —en het moet toch in te zien zijn dat dat het geval is —dan is er niets mis met deze deductie.

∨-eliminatie

We willen nu de bij de ∨-introductie horende ∨-eliminatie regel hebben. Maar dat is een probleem, want wat kunnen we uit $A \vee B$ concluderen? Zeker niet A (of B) —ja, wel 'A of B', maar die hebben we al, dus daar schieten we niets mee op. De oplossing gaat als volgt: stel je voor dat we $A \vee B$ hebben. We weten dan dat we in ieder geval één van de twee hebben (volgens de definitie van de ∨). Stel je vervolgens voor dat je kunt bewijzen dat uit A de formule C volgt. En stel je tenslotte voor dat je ook kunt bewijzen dat uit B óók C volgt. Omdat je oftewel A, oftewel B hebt (of beide), weet je nu dat je, hoe dan ook, C kunt bewijzen. Samengevat: je hebt $A \vee B$. Uit A volgt C en uit B volgt C. Dus uit $A \vee B$ volgt C, en of dat nu 'via A' of 'via B' is, is niet van belang. Je maakt dan twee 'bewijzen in het klad' (hoe dat gaat zien we straks) waarin je laat zien dat uit A respectievelijk B de formule C afleidbaar is. Als je dat hebt gedaan, heb je dus eigenlijk laten zien dat uit $A \vee B$ de formule C volgt. Dat is dan ook je conclusie. De 'kladbewijzen' mag je hierna 'weggooien' —je weet tóch niet welke van de twee hier wérkelijk van toepassing is —die van A naar C of die van B naar C —maar dat doet er ook niet toe. Je wilde immers 'iets met $A \vee B$ doen'? Hier volgt dan de regel voor de ∨-eliminatie (uitleg over de notatie daarna):

$$\cfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \nabla\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \nabla\\ C\end{array}}{C}\,\vee\mathrm{E}$$

Toelichting: Onder de streep staat, zoals te doen gebruikelijk, de conclusie. Links boven de streep staat de ∨ die we willen elimineren. Tot hier niets vreemds aan de hand. Het 'rare' gedeelte zijn de twee driehoeken naast $A \vee B$. Het is misschien duidelijk dat het hier gaat om de twee 'kladbewijzen'. De driehoeken staan voor bewijzen (natuurlijke deducties dus) die als conclusie C hebben. De bewijzen gebruiken als hypothese A resp. B. Hier staat dus dat als je een bewijs van A naar C hebt en van B naar C, dat je dan C mag concluderen uit $A \vee B$. Maar de bewijzen van A resp. B naar C zijn slechts 'klad'/tijdelijk. Het is niet écht zo dat uit A de formule C bewezen wordt —je 'hebt' A namelijk helemaal niet —en B evenmin. Je weet alleen dat je één van de twee hebt. Wat je dus eigenlijk doet, is zeggen 'stel nu eens dat ik A heb. Aha, dan kan ik C bewijzen. Stel nu eens dat ik B heb ... etc'. Daarom moeten de bewijzen van A en B naar C weggehaald worden zodra je uit $A \vee B$ de conclusie C trekt. Nu kan je wel een grote gum pakken en de bewijzen weggummen, maar dat is natuurlijk niet de oplossing. Bovendien is het wel prettig (en noodzakelijk) dat deze stukken bewijs op papier blijven staan: ze vormen namelijk je bewijs voor de correctheid van de stap van $A \vee B$ naar C. Je moet deze stukken als het ware tussen haakjes zetten.

opheffen van hypothesen

Wat we in zo'n geval doen, is de bij het bewijs horende premisse tussen vierkante haken zetten. Daarmee verwijderen we de premissen uit het totale bewijs. We noemen deze procedure het opheffen van hypothesen. We doen dit op iedere plek in een subboom waar de bijbehorende premisse voorkomt (we mochten premissen immers vaker dan één keer gebruiken). Dus overal in de linker driehoek waar A als premisse (dus 'in de lucht') voorkomt, heffen we 'm op. Idem in de rechter driehoek met B. Als bijvoorbeeld in de linker driehoek ook nog een B als premisse voorkomt, dan laten we die rustig staan —dit is de 'A-boom' en we hebben dus niets met rondslingerende B's te maken. Als we geen hypothesen zouden opheffen, dan zou in het bovenstaande geval ons bewijs opeens twee premissen extra gebruiken, nl. A en B. Daarmee zou het dus veel zwakker worden en dat willen we uiteraard niet. Door de premissen A en B te verwijderen, is ons bewijs weer even sterk als voordat we ze hadden opgevoerd. Daarom voldoet het ook om de premissen op te heffen en is het niet nodig de hele bewijsbomen weg te halen. Rest er nog één probleempje. Het is goed denkbaar dat in een ND-bewijs meerdere $\vee$-eliminaties voorkomen. Bovendien zullen we andere ND-regels leren kennen die van een soortgelijke truc gebruik maken. Er zullen dan overal in ons bewijs hypothesen rondhangen die bij verschillende bewijsstappen horen en die ook bij die verschillende stappen worden opgeheven. Het is voor de 'administratieve overzichtelijkheid' erg wenselijk om te weten welke hypothese(n) bij welke stap wordt/worden opgeheven. Daarom zetten we zowel bij de relevante stap als bij de bijbehorende hypothese(n) een nummertje (bij beide hetzelfde nummertje uiteraard). Een andere stap krijgt een ander nummer, etc. Op deze manier is altijd na te gaan waar welke hypothese(n) wordt/worden opgeheven.

Het bewijs met behulp van de $\vee$-eliminatie is niet vreemder dan andere dagelijkse praktijken; denk maar aan het openbaar vervoer naar de Uithof: bus 11 en 12 gaan beide van het Centraal Station naar de Uithof. Wie met de bus naar de Uithof wil, redeneert 'per geval': zo iemand zegt bij zichzelf "als ik aankom staat bus 12 klaar en neem ik die, of ik loop door naar 11 en neem díe. In beide gevallen kom ik in de Uithof. Ergo: in ieder geval kom ik in de Uithof." Met de $\vee$-eliminatie gaat het precies zo: je weet $A \vee B$ en bovendien 'als A, dan C' en 'als B, dan C'. Kijk nu even wie van de twee het geval is, A of B, en concludeer C. Omdat je niet altijd van te voren weet of het A of B zal worden, moet je voor alle zekerheid zowel C uit A, als C uit B kunnen concluderen. De kneep van de $\vee$-eliminatie zit 'm onder andere in het opvoeren van A en B als hulp-hypothesen onderweg —je hoeft alleen $A \vee B$ te weten en dat is dus de enige aanname (of het enige dat je al bewezen had). Aan het eind van het bewijs kan het je niet meer schelen of nu A of B het geval was. In technische zin: A en B zijn ná de $\vee$-eliminatie géén hypothesen meer.

Een eenvoudig voorbeeld bewijst de commutativiteit van de $\vee$:

v. $A \vee B \vdash B \vee A$

$$\dfrac{A \vee B \qquad \dfrac{[A]^1}{B \vee A}\,\vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{[B]^1}{B \vee A}\,\vee\mathrm{I}}{B \vee A}\,\vee\mathrm{E}, 1$$

Wat we hier lezen is: 'Ik heb $A \vee B$. Stel dat ik A heb, dan heb ik $B \vee A$. Stel dat ik B heb, dan heb ik ook $B \vee A$. Dus welke van de twee ik ook heb, ik heb in ieder geval $B \vee A$ en dat mag ik dan ook concluderen. Maar A heb ik niet werkelijk, evenals B. Ik heb ze echter wel als hypothese gebruikt, dus ik moet ze opheffen. De $\vee$-eliminatie noem ik stap 1, dus ik zet een 1 naast de streep. De bij deze $\vee$-eliminatie horende hypothesen zet ik tussen haken en ik zet er ook een 1 bij.' We zien dat in het voltooide bewijs nog maar één hypothese voorkomt die niet is opgeheven: $A \vee B$. En dat klopt precies, want dat is ook de enige hypothese die voor de $\vdash$ staat.

Nog een voorbeeld. Probeer al lezend dit voorbeeld te begrijpen. Als je het niet hele-maal kan volgen, probeer dan de deductie zelf te maken (dit geldt uiteraard ook voor de deducties die verderop komen). Als je ze zelf maakt, kan het best zo zijn (zeker als het wat ingewikkelder wordt) dat je een heel ander oplossing hebt dan degene die hier vermeld staat. Dat hoeft helemaal niet te betekenen dat het dan fout is: er zijn bijna altijd meerdere oplossingen mogelijk (zie voorbeeld (ii) en (iii))—ze zullen niet allemaal even kort of even elegant zijn, maar 'lang' of 'onelegant' is niet 'fout'.

vi. $A \vee B \vdash (A \wedge (A \vee B)) \vee (B \wedge (A \vee B))$

$$\dfrac{A \vee B \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad A \vee B}{A \wedge (A \vee B)}\,\wedge\mathrm{I}}{(A \wedge (A \vee B)) \vee (B \wedge (A \vee B))}\,\vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{[B]^1 \quad A \vee B}{B \wedge (A \vee B)}\,\wedge\mathrm{I}}{(A \wedge (A \vee B)) \vee (B \wedge (A \vee B))}\,\vee\mathrm{I}}{(A \wedge (A \vee B)) \vee (B \wedge (A \vee B))}\,\vee\mathrm{E}, 1$$

Ai, die ziet er wel groot uit... Merk op dat de gegeven hypothese $A \vee B$) in totaal drie keer gebruikt wordt.

'Ja, dat is wel mooi', zullen sommigen nu denken, 'als ik het lees kan ik dit wel volgen, maar hoe doe je nou zélf zoiets?' Antwoord hierop: ten eerste oefenen, oefenen; ten tweede nog meer oefenen; ten derde proberen de voorbeelden zelf na te maken; ten vierde de Gouden Tips ter harte nemen. Hier is dan Gouden Tip nr.1 (N.B. Bedenk je bij alle nog volgende Gouden Tips dat het slechts tips zijn —geen wetten van Meden of Perzen. Alle heuristieken lijden aan hetzelfde gebrek: ze zijn vaak (tot erg vaak) van toepassing, maar zeker niet altijd. Het negeren van heuristieken wordt hard bestraft, maar het slaafs opvolgen ervan evenzeer.):

Gouden Tip nr.1:

Deducties lees je i.h.a. van boven naar onderen—van de hypothesen naar de conclusie. Dit is de 'logische redeneerrichting'. Dat wil echter niet zeggen dat het bewijs ook in deze volgorde gemaakt is. Vaak zul je van onder naar boven werken. Met name in het begin is dit erg handig. Als je alleen nog maar weet wat je conclusie moet worden en nog geen idee hebt van hoe je daar moet komen, is het makkelijk om eerst zoveel mogelijk naar boven te werken. In het algemeen zal namelijk de bovenste formule dan steeds korter worden —en dus makkelijker te bewijzen. Het komt erop neer dat je probeert de te bewijzen conclusie op te splitsen in kleinere delen, die je dan achtereenvolgens (weer van boven naar beneden) bewijst. Als je een tafel wilt maken, kan het ook makkelijk zijn om je te bedenken dat je dus een blad en vier poten moet maken. Als je weet hoe je blad en poten aan elkaar moet vastmaken, kun je je nu richten op de afzonderlijke problemen van het maken van een blad en het maken van de poten. Het blad bestaat weer uit een bovendeel en een rand. Nu kun je je achtereenvolgens op de problemen 'bovenstuk' en 'rand' storten, etc. Dat 'opsplitsen' van de conclusie gebeurt middels het hoofdvoegteken van de zin: als de te bewijzen formule een $\wedge$ als hoofdvoegteken heeft, kun je op je vingers natellen dat de stap waaruit deze formule ontstaan is waarschijnlijk wel een $\wedge$-introductie zal zijn geweest. Je zet dus een streep boven de formule, noemt deze $\wedge$-I en schrijft boven de streep de twee conjuncten. De formule is nu in twee helften gesplitst, die je afzonderlijk kunt bewijzen. Dit gaat heel vaak zo: als het hoofdvoegteken # is, heb je daarboven waarschijnlijk een #-introductie gehad. Het kan in ieder geval geen andere introductieregel geweest zijn (waarom niet?), dus de enige andere mogelijkheid is de een of andere eliminatie regel. Maar dan zou de formule boven de streep (i.h.a.) langer zijn dan die onder de streep—en dat vinden we natuurlijk niet prettig. Dus ga er maar van uit dat het een #-I is geweest. Ter toelichting gaan we deze Tip eens toepassen op één van de eenvoudige voorbeelden die we al eerder hebben gezien. We bewijzen weer $A \wedge (B \wedge C) \vdash (A \wedge B) \wedge C$. Eerst schrijven we de conclusie op. Het hoofdvoegteken is een $\wedge$, dus boven de conclusie zal wel een $\wedge$-introductie moeten staan. We hebben dan:

hoofdvoegteken

$$\dfrac{A \wedge B \quad C}{(A \wedge B) \wedge C}\ \wedge\mathrm{I}$$

Op $A \wedge B$ laten we weer dezelfde gedachtengang los, met als resultaat:

$$\dfrac{\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge\mathrm{I} \quad C}{(A \wedge B) \wedge C}\ \wedge\mathrm{I}$$

Nu kunnen we niet verder naar boven (wat zou er boven A moeten staan?) We zijn dus gedwongen om nu van boven naar beneden te werken. Welk 'gereedschap' hebben we? Alleen de hypothese $A \wedge (B \wedge C)$. Daar zullen we het dus mee moeten doen. We moeten drie bewijzen maken van resp. A, B en C. De formule A bewijzen uit $A \wedge (B \wedge C)$ is niet moeilijk —daar hebben we de $\wedge$-eliminatie voor:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{A}\ \wedge\mathrm{E} \quad B}{A \wedge B}\ \wedge\mathrm{I} \quad C}{(A \wedge B) \wedge C}\ \wedge\mathrm{I}$$

Voor B en C doen we hetzelfde. Dit keer hebben we echter per bewijs twee $\wedge$-eliminaties nodig:

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{A}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}} \qquad \dfrac{\dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{B \wedge C}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}}}{B}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}}}{A \wedge B}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{I}} \qquad \dfrac{\dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{B \wedge C}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}}}{C}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}}$$
$$\overline{\qquad\qquad (A \wedge B) \wedge C \qquad\qquad}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{I}}$$

We hebben nu alleen nog maar dingen 'in de lucht hangen' die we ook mochten gebruiken, namelijk de hypothese $A \wedge (B \wedge C)$. Het bewijs is dus klaar.

We geven nog een (wat ingewikkelder) voorbeeld. We bewijzen één van de distributiewetten: $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Het hoofdvoegteken van de te bewijzen formule is een $\wedge$. De deductiestap boven deze formule zal dus wel een $\wedge$-introductie geweest zijn. We krijgen dan:

$$\dfrac{A \vee B \quad A \vee C}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{I}}$$

We moeten nu dus twee bewijzen maken: één van $A \vee B$ en één van $A \vee C$. We beginnen met $A \vee B$. Als Gouden Tip nr.1 Universele Geldigheid zou bezitten, dan zouden we nu het volgende denken: het hoofdvoegteken van $A \vee B$ is de $\vee$, dus we zullen wel een $\vee$-introductie gehad hebben. Maar dat betekent dat we dan boven de $\vee$-introductie alleen een A (of een B) zouden hebben. We moeten dan A (resp. B) bewijzen uit de hypothese $A \vee (B \wedge C)$. Enig nadenken maakt duidelijk dat we uit deze hypothese nooit A (of B) zullen kunnen bewijzen: uit een hypothese van de vorm $A \vee \ldots$ zul je (i.h.a.) nooit kunnen concluderen dat je A hebt (laat dat goed tot je doordringen). Wat hebben we dan wel voor een stap gedaan? Het kan geen andere introductie zijn (waarom niet), dus moeten we een eliminatie stap gehad hebben. Maar wat is er geëlimineerd? De enige hypothese die we hebben is $A \vee (B \wedge C)$. Daarvan kunnen we de $\vee$ elimineren (omdat die het hoofdvoegteken is). We proberen het eens:

$$\dfrac{\dfrac{A \vee (B \wedge C) \quad \begin{matrix} A \\ \vdots \\ A \vee B \end{matrix} \quad \begin{matrix} B \wedge C \\ \vdots \\ A \vee B \end{matrix}}{A \vee B}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{E}} \qquad A \vee C}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{I}}$$

Als $A \vee B$ de conclusie uit de $\vee$-eliminatie is, dan komt deze zelfde formule boven de streep twee keer terug. We moeten nu dus zowel uit A als uit $B \wedge C$ de formule $A \vee B$ bewijzen—dit wordt door de stippellijntjes aangeduid. Van A naar $A \vee B$ is niet moeilijk:

$$\dfrac{\dfrac{A \vee (B \wedge C) \quad \dfrac{A}{A \vee B}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{I}} \quad \begin{matrix} B \wedge C \\ \vdots \\ A \vee B \end{matrix}}{A \vee B}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{E}} \qquad A \vee C}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{I}}$$

Merk op dat de $\vee$ in $A \vee B$ die we daarnet niet konden introduceren, nu wél geïntroduceerd wordt (als hij er staat, moet hij toch ook érgens vandaan komen, dus óóit moet-ie geïntroduceerd worden). We moeten nu nog van $B \wedge C$ naar $A \vee B$. Ook dat is niet moeilijk en vergt maar twee stappen. De linkerkant van ons bewijs is nu klaar. We heffen meteen maar even de bij deze $\vee$-introductie horende hypothesen op —dan vergeten we dat straks tenminste niet:

$$\dfrac{\dfrac{A \vee (B \wedge C) \quad \dfrac{[A]^1}{A \vee B}\,\vee\mathrm{I} \quad \dfrac{\dfrac{[B \wedge C]^1}{B}}{A \vee B}\,\vee\mathrm{I}}{A \vee B}\,\vee\mathrm{E}, 1 \qquad A \vee C}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}\,\wedge\mathrm{I}$$

Zowel de hypothese als de conclusie is symmetrisch: $A \vee (B\wedge$ C) Eq $A \vee (C \wedge B)$ Eq $(B \wedge C) \vee A$, etc. en $(A \vee B) \wedge (A\vee$ C) Eq $(A \vee C) \wedge (A \vee B)$, etc. Daarom zal de rechterkant van ons bewijs er nagenoeg hetzelfde uitzien als de linkerkant:

$$\dfrac{\dfrac{A \vee (B \wedge C) \quad \dfrac{[A]^1}{A \vee B}\,\vee\mathrm{I} \quad \dfrac{\dfrac{[B \wedge C]^1}{B}}{A \vee B}\,\vee\mathrm{I}}{A \vee B}\,\vee\mathrm{E}, 1 \qquad \dfrac{A \vee (B \wedge C) \quad \dfrac{[A]^1}{A \vee C}\,\vee\mathrm{I} \quad \dfrac{\dfrac{[B \wedge C]^1}{C}}{A \vee C}\,\vee\mathrm{I}}{A \vee C}\,\vee\mathrm{E}, 1}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}\,\wedge\mathrm{I}$$

Let er op dat de tweede $\vee$-eliminatie een ander nummer krijgt dan de eerste! De enige niet-opgeheven hypothese is $A\vee(B\wedge$ C) en die was ook als hypothese gegeven. Ons bewijs is dus in orde.

Gouden Tip nr.2:

De tweede Gouden Tip is van boekhoudkundige aard. Het zal je opgevallen zijn dat je nieuwe hypothesen krijgt als je een $\vee$-eliminatie gebruikt—namelijk de twee disjuncten van de $\vee$ die je elimineert. De $\vee$-eliminatie levert dus hypothesen op als je van onder naar boven leest (van boven naar onder lezend worden juist hypothesen opgeheven). We zullen straks meer regels tegenkomen die hypothesen opleveren. Het blijkt een goede gewoonte te zijn om een lijstje van beschikbare hypothesen bij te houden: als hypothesen de hamers en zagen van de logica zijn, is het wel plezierig om te weten dat je een hamer of zaag ter beschikking hebt.

Als je een bewijs maakt, begin je altijd met opschrijven van de conclusie (daar moet je immers naartoe). Het is handig om de hypothesen die je tot je beschikking hebt onder de conclusie te schrijven (aangezien je meestal niet bij voorbaat weet hoe 'hoog' een deductie wordt, zou het een rommeltje kunnen worden als je de hypothesen ergens bovenaan neerzet). Oplettende lezertjes zullen nu een 'typografisch probleem' signaleren: hypothesen die je in de loop van het bewijs krijgt (zoals die van de $\vee$-eliminatie), mag je slechts in een deel van de bewijsboom gebruiken—we merkten al op dat je bijvoorbeeld bij het $\vee$-elimineren van $A \vee B$ de hypothese B alleen in de rechter bewijstak mag gebruiken. Bij het maken van een lijstje hypothesen is het vrij lastig om nog duidelijk te maken welke hypothesen in welk stuk van de boom gebruikt mogen worden. De lezer wordt uitgenodigd haar/zijn eigen creativiteit op dit 'probleem' bot te vieren.

Gouden Tip nr.3:

Aansluitend bij Gouden Tip nr.1. Zoals we al zagen, zal in het algemeen het hoofdvoegteken van een formule in de er boven staande stap geïntroduceerd zijn. We zagen hierboven echter een uitzondering toen we moesten bepalen wat er boven $A \vee B$ gebeurd was: dit bleek geen $\vee$-introductie geweest te zijn. Het zal vaak voorkomen dat een $\vee$ als hoofdvoegteken niet direct van een $\vee$-introductie stamt, vooral niet als de betreffende stap zich relatief laag in het bewijs bevindt. Hoe komt dit? Stel dat je $A \vee B$ moet bewijzen. Als deze formule de conclusie uit een $\vee$-introductie is, dan heeft er boven de streep dus een A (of een B) gestaan. Dat betekent dat je nu, van onder naar boven denkend, A moet bewijzen. Helaas, 'A' is een veel sterkere uitspraak dan '$A \vee B$ ' en dus moeilijker te bewijzen. Bovendien doet de B er blijkbaar helemaal niet toe. Als je A kunt bewijzen, kun je m.b.v. de $\vee$-introductie ook bijvoorbeeld $A \vee C$ bewijzen. De B is geheel willekeurig — omhoog werkend gooi je de B weg, alsof die er helemaal niet toe doet. Je kunt nu op je vingers natellen dat de kans dat de conclusie een volstrekt willekeurig element bevat wel erg klein is (dit zou toch immers tamelijk onzinnig zijn?).

Waarom doet dit probleem zich hoofdzakelijk onderin de bewijsboom voor? Omdat je vaak, terwijl je 'naar boven werkt', extra hypothesen krijgt (zie Gouden Tip nr.2) die er voor zorgen dat de zogenaamd willekeurige 'B' uit ons voorbeeld niet meer zo willekeurig is. Als je naar het laatste voorbeeld uit Gouden Tip nr.1 kijkt, zie je dat boven $A \vee B$ een $\vee$-eliminatie staat. Deze levert onder andere de hypothese $B\wedge$ C op. Deze hypothese bevat B, waardoor de B van $A \vee B$ niet meer willekeurig is (probeer de $\vee$-introductie die A in $A \vee B$ omzet maar te vervangen door een stap met $A\vee$ D als conclusie). Hierdoor is het nu wél mogelijk boven $A \vee B$ een $\vee$-introductie te zetten.

Maar als dan blijkt dat de stap boven een formule met een $\vee$ als hoofdvoegteken geen $\vee$-introductie is, wat moet daar dan wél boven staan? In ieder geval geen andere introductieregel (waarom?). De enige andere mogelijkheid is een eliminatieregel. Het zal blijken dat vaak (maar lang niet altijd) een $\vee$-eliminatie een goede keus is. Je moet dan alleen natuurlijk wel een hypothese hebben met een $\vee$ als hoofdvoegteken, anders valt er niets te elimineren!

Gouden Tip nr.4:

Deze tip komt hierop neer: probeer de $\vee$-eliminatie—en andere hypothesen-opleverende stappen —zo laag mogelijk in de bewijsboom te houden. Soms heb je wel enige keuzevrijheid ten aanzien van de exacte plaatsing van een bepaalde deductiestap (dat zal blijken als je zelf deducties maakt). Het is in dit soort gevallen aan te bevelen om deductiestappen die hypothesen opleveren, zoals de $\vee$-eliminatie, zo laag mogelijk te gebruiken. De reden hiervoor is evident: de door dit soort stappen opgeleverde hypothesen mag je alleen gebruiken boven de betreffende stap. Door deze stap zo laag mogelijk te houden, zorg je er dus voor dat je de bijbehorende hypothesen zo lang mogelijk mag gebruiken—en hoe langer je je hamer mag gebruiken, hoe makkelijker het wordt om die tafel af te krijgen.

3. ... en de overige stappen

Na de voorgaande voorzichtige kennismaking met het systeem ND zullen we in deze paragraaf in iets hoger tempo de overige deductiestappen presenteren. Nu we weten hoe we conjuncties en disjuncties introduceren en elimineren, gaan we ons bezig houden met de implicatie.

pijl-eliminatie
$\to$-eliminatie
modus ponens

3.1. De implicatie. We beginnen met de pijl-eliminatie, aka $\to$-eliminatie aka modus ponens. We hebben dus een formule $A \to B$ en willen de pijl zien kwijt te raken. $A \to B$ kun je lezen als 'als ik A heb dan heb ik B'. Stel je voor dat je A écht hebt —dan heb je B dus ook echt! Er is nu een voor de hand liggende formulering van de pijl-eliminatie: als ik $A \to B$ heb en als ik ook nog A heb, dan heb ik B. Of, formeel:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}\ {\to}\mathrm{E}$$

Deze vrij eenvoudige regel kunnen we bijvoorbeeld gebruiken om een ketting van pijlen te elimineren. We bewijzen $A, A \to B, B \to C, C \to D \vdash D$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \quad A \to B}{B}\ {\to}\mathrm{E} \qquad B \to C}{C}\ {\to}\mathrm{E} \qquad C \to D}{D}\ {\to}\mathrm{E}$$

In verband met deze regel volgt hier...

Gouden Tip nr.5:

Niet zozeer een tip als wel een gebod(!). Gij zult deductiestrepen niet doortrekken tot boven een hypothese. Hypothesen horen 'vrij in de lucht' te hangen en het begin van bovenstaand bewijs hoort er dus niet als volgt uit te zien:

$$\begin{array}{c} A \quad A \to B \\ \hline B \quad B \to C \\ \hline \vdots \end{array} \ \begin{array}{l} \\ {\to}\mathrm{E} \\ {\to}\mathrm{E} \end{array}$$

Als je het op deze manier zou opschrijven, lijkt het alsof je twee conclusies uit één deductiestap trekt en dat is niet de bedoeling. Dit soort schijnbare 'spijkers op laag water' komt de leesbaarheid van een bewijs buitengewoon ten goede (en bovendien is wat hierboven staat ook gewoon fout!).

pijl-introductie
$\to$-introductie

Na de pijl-introductie aka $\to$-introductie komt uiteraard ... We willen nu een deductiestap die als conclusie iets van de vorm $A \to B$ heeft. Wanneer mogen we concluderen dat we als we A hebben ook B hebben? Door concreet te laten zien dat we inderdaad B hebben als we er even vanuit gaan dat we A hebben. We maken dus een bewijs dat als hypothese A heeft en als conclusie B. Als we dit hebben gedaan, hebben we dus laten zien dat B uit A volgt, dus dat $A \to B$. Let op, de hypothese A hebben we niet 'echt' —we lieten alleen zien dat als we A hebben, we dan ook B hebben. De hypothese A moet dus achteraf opgeheven worden. In 't echt ziet de $\to$-introductie er zo uit:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \bigtriangledown \\ B\end{array}}{A \to B}\;{\to}\mathrm{I}$$

De driehoek staat weer voor een ND-bewijs. Merk op dat deze regel weer een hypothese oplevert!

Laten we maar weer eens een voorbeeld gaan bekijken dat gebruik maakt van een aantal regels die we al kennen.

i. We laten zien dat $(A \to B) \vee (A \to C) \vdash A \to (B \vee C)$. We schrijven de conclusie op en merken op dat het hoofdvoegteken een pijl is. De stap boven de conclusie zal dus wel een pijl-introductie geweest zijn. We moeten dus bewijzen dat $(B \vee C)$ uit A volgt. Als nieuwe hypothese krijgen we dus A erbij.

$$\dfrac{\begin{array}{c}A\\ \vdots \\ B \vee C\end{array}}{A \to (B \vee C)}\;{\to}\mathrm{I}$$

We moeten nu bepalen welke stap we boven $B \vee C$ gedaan hebben. Als we naar onze hypothesen kijken, zal het snel duidelijk worden dat we noch B, noch C kunnen bewijzen. De gezochte stap kan dus geen $\vee$-introductie geweest zijn. Gouden Tip 3 indachtig kunnen we een $\vee$-eliminatie proberen. We hebben een hypothese met een $\vee$ als hoofdvoegteken, dus ...

$$\dfrac{\dfrac{(A \to B) \vee (A \to C) \qquad \begin{array}{c}A \quad A \to B\\ \vdots \\ B \vee C\end{array} \qquad \begin{array}{c}A \quad A \to C\\ \vdots \\ B \vee C\end{array}}{B \vee C}\;{\vee}\mathrm{E}}{A \to (B \vee C)}\;{\to}\mathrm{I}$$

Merk op dat de hypothese A in beide bomen van de $\vee$-eliminatie gebruikt mag worden: hij mag namelijk overal boven de plaats waar we 'm gekregen hebben (de $\to$I) gebruikt worden. Als we ons even op de linkertak van de $\vee$-eliminatie richten: we moeten uit A en $A \to B$ bewijzen dat $B \vee C$ het geval is. De combinatie A en $A \to B$ vraagt om een $\to$-eliminatie, waarna een $\vee$-introductie het geheel completeert:

$$\dfrac{\dfrac{(A \to B) \vee (A \to C) \qquad \dfrac{\dfrac{A \quad A \to B}{B}\;{\to}\mathrm{E}}{B \vee C}\;{\vee}\mathrm{I} \qquad \begin{array}{c}A \quad A \to C\\ \vdots \\ B \vee C\end{array}}{B \vee C}\;{\vee}\mathrm{E}}{A \to (B \vee C)}\;{\to}\mathrm{I}$$

De linkerkant van het bewijs is nu klaar. De rechterkant gaat op geheel analoge wijze. We moeten nog een paar hypothesen opheffen. De eerste stap die ons hypothesen opleverde (van boven naar onder lezend) was de $\vee$-E. Deze noemen we dan maar 1 en de bijbehorende hypothesen $A \to B$ en $A \to C$ heffen we op. De $\to$I leverde ons de hypothese A op. We noemen deze stap 2 en heffen A op.

$$\dfrac{\dfrac{(A \to B) \vee (A \to C) \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad [A \to B]^1}{B}\,{\to}\mathrm{E}}{B \vee C}\,{\vee}\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad [A \to C]^1}{C}\,{\to}\mathrm{E}}{B \vee C}\,{\vee}\mathrm{I}}{B \vee C}\,{\vee}\mathrm{E}, 1}{A \to (B \vee C)}\,{\to}\mathrm{I}, 2$$

De enige hypothese die er nog staat is degene die we gekregen hadden. Ons bewijs is dus klaar.

Stelling 3.11 in Paragraaf 7.3.3 vertelde ons dat je ieder redeneerschema kunt ombouwen tot een tautologie: iets als $A, B \models C$ wordt dan $\models A \to (B \to C)$. Het syntactische equivalent hiervan is erg eenvoudig. $A, B \vdash C$ wil zeggen dat je een bewijs van C kunt maken met behulp van de hypothesen A en B. Als je dit bewijs eenmaal hebt, kun je de hypothesen verwijderen door tweemaal achter elkaar een pijl te introduceren en de bijbehorende hypothese op te heffen. Dus zo:

$$\begin{array}{c} A \quad B \\ \vdots \\ C \end{array} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} A \quad [B]^1 \\ \vdots \\ C \end{array}}{B \to C}\,{\to}\mathrm{E}, 1 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} [A]^2 \quad [B]^1 \\ \vdots \\ C \end{array}}{B \to C}\,{\to}\mathrm{E}, 1}{A \to (B \to C)}\,{\to}\mathrm{I}, 2$$

Eén ... en ... twee ... ... en klaar

Uiteraard had je ook $B \to (A \to C)$ kunnen afleiden, door de hypothesen in omgekeerde volgorde op te heffen c.q. de pijlen in omgekeerde volgorde te introduceren.

Tot slot van dit pijlenverhaal nog enige merkwaardigheden. We willen uiteraard $B \vdash A \to B$ kunnen bewijzen. De manier waarop je dit doet is als volgt;

$$\dfrac{B}{A \to B}\,{\to}\mathrm{I}$$

Het merkwaardige is natuurlijk dat de hypothese A, die je ergens in het bewijs zou verwachten, helemaal nergens voorkomt. Maar we hebben 'm immers ook helemaal niet nodig! Normaal gesproken zouden we B uit A moeten bewijzen — maar B hebben we al en hoeft dus niet meer bewezen te worden. Blijkbaar ben je niet verplicht al je hypothesen te gebruiken (je hoeft thuis toch ook niet al je gereedschap te gebruiken als je een klusje doet?).

De kwestie van het opheffen van hypothesen is voor beginners erg verwarrend en hij blijkt nóg verwarrender te zijn dan de lezer misschien gedacht heeft:

Bij toepassing van de $\to$I mág je de hypothese opzeggen, omdat je hem aan het eind niet meer nodig hebt, maar móet het ook? We kijken nog eens naar het bovenstaande bewijs van $(A \to B) \vee (A \to C) \vdash A \to (B \vee C)$. Stel dat we bij de laatste stap (de pijl-introductie) de hypothesen A niet opheffen. Wat we dan hebben bewezen is dat $(A \to B) \vee (A \to C), A \vdash A \to (B \vee C)$ en dat is zwakker dan wél opzeggen (dan gebruiken we immers maar één hypothese in plaats van twee). Maar ook al verzwakken we op deze manier ons bewijs, het is daarom nog niet fout —het resultaat is alleen niet het best mogelijke. Wie voor een karweitje een hamer en een zaag nodig heeft, kan hetzelfde karweitje ook doen als hij hamer, zaag, boor en nijptang meeneemt —het is niet fout, maar alleen niet zo slim. Daarom hanteren we de vuistregel 'zeg alles op wat je kunt opzeggen'.

Het voorbeeld $B \vdash A \to B$ levert weer een ander probleem op. De plichtsgetrouwe lezer wil A opheffen, maar A is helemaal niet gebruikt. We zagen al dat dit geen werkelijk probleem is: we moeten alleen de opzeg-voorschriften goed formuleren. Bij de $\to$I zegt het opzeg-voorschrift: overal waar A als echte (d.w.z. nog niet opgezegde) hypothese voorkomt, mag je hem opzeggen. Als er niet zo'n hypothese gebruikt is, dan valt er dus stomweg niets op te heffen en is de $\to$I verder gewoon in orde. Wanneer Marie tegen Jan zegt "Als het licht boven nog aan is, doe het dan even uit en kom beneden", dan zal Jan, wanneer het licht niet aan was, niet in een toestand van verhoogde nervositeit blijven rondlopen, maar gewoon beneden komen en zeggen "alles OK, schat".

Nog een voorbeeld van een merkwaardige constructie: stel dat we willen bewijzen dat $A \vee B, B \to A \vdash A$. Dat doen we dan zo:

$$\dfrac{A \vee B \quad [A]^1 \quad \dfrac{[B]^1 \quad B \to A}{A}\,{\to}\mathrm{E}}{A}\;\vee\mathrm{E}, 1$$

Het merkwaardige hier is dat in de linkertak van de $\vee$-eliminatie maar één ding staat, n.l. A. Deze A is hier hypothese en conclusie tegelijk! Je wilt eigenlijk als conclusie A hebben —en dat met behulp van een hypothese A. Maar als hypothese en conclusie hetzelfde moeten worden, dan zijn ze gewoon hetzelfde ding (why not?).

3.2. De bi-implicatie. De dubbele pijl is niets meer dan een gewone pijl die 'twee kanten op gaat'. Deze overeenkomst tussen pijl en dubbele pijl uit zich ook in de overeenkomst tussen de respectieve deductieregels. We hoeven daar dus niet veel woorden aan vuil te maken.

De dubbele pijl kan net als een gewone pijl geëlimineerd worden—echter nu twee kanten op. We hebben dus ook twee regels nodig: $\leftrightarrow$-eliminatie

$$\dfrac{A \quad A \leftrightarrow B}{B}\,{\leftrightarrow}\mathrm{E} \qquad \dfrac{B \quad A \leftrightarrow B}{A}\,{\leftrightarrow}\mathrm{E}$$

Simple, isn't it?

Ook de introductie van de dubbele pijl is slechts een verdubbeling van de gewone pijl-introductie. Omdat de dubbele pijl twee kanten op werkt, moeten we niet slecths een bewijs van A uit B maken, maar ook één van B naar A:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \bigtriangledown\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \bigtriangledown\\ A\end{array}}{A \leftrightarrow B}\ \leftrightarrow\mathrm{I}$$

Als we deze regel gebruiken, krijgen we dus boven de streep twee bewijsbomen die respectievelijk laten zien dat je B uit A kunt bewijzen en dat je A met behulp van B kunt bewijzen. Ook hier geldt uiteraard, net als bij de $\vee$-eliminatie, dat in de rechtertak alleen de hypothese A gebruikt mag worden (plus de overige hypothesen die je al had), maar niet B —en andersom voor de linkertak. Zowel A als B worden opgeheven op het moment dat je de $\leftrightarrow$ introduceert. Beide krijgen dus ook hetzelfde nummertje. Deze regel laat goed zien dat een dubbele pijl niets anders is dan twee enkele pijlen, oftewel dat $A \leftrightarrow B$ Eq $(A \to B) \wedge (B \to A)$. Vergelijk bovenstaande regel maar eens met het volgende:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \bigtriangledown\\ B\end{array}}{A \to B}\ \to\mathrm{I} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[B]\\ \bigtriangledown\\ A\end{array}}{B \to A}\ \to\mathrm{I}}{(A \to B) \wedge (B \to A)}\ \wedge\mathrm{I}$$

Gegeven een bewijs van A naar B en van B naar A kun je dus net zo gemakkelijk $A \leftrightarrow B$ bewijzen als $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

3.3. De negatie. In Stelling 3.12 in Paragraaf 7.3.4 zagen we dat $\neg A$ equivalent is met $A \to \bot$. We zullen merken dat de deductieregels voor de $\neg$ deze equivalentie weerspiegelen.

¬-introductie

We gaan op zoek naar een regel voor de ¬-introductie. Stel dat we $A \to \bot$ zouden schrijven in plaats van ¬A. We zouden dan met een pijl-introductie te maken hebben die er als volgt uit ziet:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \bigtriangledown\\ \bot\end{array}}{A \to \bot}\ \to\mathrm{I}$$

Eigenlijk ís dit een niet-introductie—weliswaar in niet geheel herkenbare vorm, maar dat doet er niet werkelijk toe. De 'echte' niet-introductie is exact hetzelfde als bovenstaande pijl-introductie, behalve dat '¬A' wordt geschreven in plaats van '$A \to \bot$'. Bovendien heet het nu natuurlijk een ¬-introductie en geen $\to$-introductie.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \nabla \\ \bot\end{array}}{\neg A}\ \neg\mathrm{I}$$

Terug naar Normaal Nederlands. Hoe moeten we dit nu lezen? De niet-introductie zegt eigenlijk dat als uit A falsum (het onware, tegenspraak, ...) volgt, dat we dan blijkbaar A niet hebben —dus dat we niet-A hebben (tegenspraken zijn immers 'verboden' in de logica). Net als bij de pijl-introductie wordt onze starthypothese opgeheven op het moment dat we de $\neg$ introduceren. Of, andersom denkend: deze regel levert ons weer een hypothese op. Dit opheffen van A is wel voor de hand liggend: als uit A falsum volgt en je concludeert dat je A dus blijkbaar niet hebt, dan moet je 'm natuurlijk ook wel weghalen.

¬-eliminatie

Op geheel analoge wijze vinden we de regel voor de ¬-eliminatie. We kijken weer eerst naar de situatie waarin we $A \rightarrow \bot$ schrijven voor $\neg A$. Als we deze pijl elimineren krijgen we:

$$\dfrac{A \quad A \rightarrow \bot}{\bot}\ \rightarrow\!\mathrm{E}$$

We vervangen weer $A \rightarrow \bot$ door het equivalente $\neg A$ en noemen de regel nu ¬E:

$$\dfrac{A \quad \neg A}{\bot}\ \neg\mathrm{E}$$

Dit zegt dus dat A en ¬A samen een tegenspraak opleveren (is toch ook wel voor de hand liggend, nietwaar?).

Goed, dit was nou niet echt moeilijk. Er valt momenteel verder weinig te zeggen over deze regels, dus misschien is het zinnig om een paar voorbeelden van toepassingen te laten zien—de eerste mét, de rest zónder uitleg: puzzel ze zelf eens uit.

Voorbeelden:

i. We bewijzen dat $B \rightarrow A \vdash \neg A \rightarrow \neg B$ (contrapositie, zie Stelling 3.12 van Hoofdstuk 7.)

   Het hoofdvoegteken van $\neg A \rightarrow$ ¬B is de →, dus we beginnen met een →I, wat ons meteen de hypothese ¬A oplevert:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\neg A \quad B \rightarrow A\\ \vdots \\ \neg B\end{array}}{\neg A \rightarrow \neg B}\ \rightarrow\!\mathrm{I}$$

   Het hoofdvoegteken is nu een ¬. We vervolgen ons bewijs met een ¬I en krijgen daardoor de hypothese B er bij:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\neg A \quad B \quad B\to A\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg B}\,\neg\mathrm{I}}{\neg A\to\neg B}\,\to\mathrm{I}$$

We weten nu niet hoe we verder omhoog moeten en gaan dus maar proberen van boven naar beneden te werken. Als we naar onze hypothesen kijken, zien we dat we een B hebben en $B \to A$. Die pijl kunnen we dus elimineren:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\neg A \quad B \quad B\to A\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg B}\,\neg\mathrm{I}}{\neg A\to\neg B}\,\to\mathrm{I} \qquad \dfrac{B \quad B\to A}{A}\,\to\mathrm{E}$$

Nu moeten we de A en de $\bot$ nog 'aan elkaar praten'. We zien dat we ook een hypothese $\neg A$ hebben. Samen met de net bewezen A levert dat natuurlijk een pracht van een $\bot$ op —precies wat we wilden. Het bewijs is nu klaar. We hoeven alleen nog op de juiste plekken wat hypothesen op te heffen:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^1 \quad B\to A}{A}\,\to\mathrm{E} \qquad [\neg A]^2}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{\neg B}\,\neg\mathrm{I},1}{\neg A\to\neg B}\,\to\mathrm{I},2$$

We zien dat we als enige hypothese $B \to A$ over hebben —en dat was ook precies de hypothese die gegeven was!

ii. $A \to B, B \to \neg A \vdash \neg A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad A\to B}{B}\,\to\mathrm{E} \qquad B\to\neg A}{\neg A}\,\to\mathrm{E} \qquad [A]^1}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{\neg A}\,\neg\mathrm{I},1$$

deelconclusie

Waar zijn de laatste twee stappen eigenlijk voor nodig? We hadden toch $\neg A$ al? Nee: de *deelconclusie* $\neg A$ berust op de hypothesen A en $A \to B$ en $B \to \neg A$. De eindconclusie $\neg A$ daarentegen berust alleen op $A \to B$ en $B \to \neg A$. De rol van de laatste stappen was dus de hypothese A kwijt te raken.

iii. Een variant op voorbeeld (i): $A \leftrightarrow B \vdash \neg A \leftrightarrow \neg B$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A]^1$}
\AxiomC{$A \leftrightarrow B$}
\RightLabel{$\leftrightarrow$E}
\BinaryInfC{B}
\AxiomC{$[\neg B]^3$}
\RightLabel{$\neg$E}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\bot$I, 1}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\AxiomC{$[B]^2$}
\AxiomC{$A \leftrightarrow B$}
\RightLabel{$\leftrightarrow$E}
\BinaryInfC{A}
\AxiomC{$[\neg A]^3$}
\RightLabel{$\neg$E}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\bot$I, 2}
\UnaryInfC{$\neg B$}
\RightLabel{$\leftrightarrow$I, 3}
\BinaryInfC{$\neg A \leftrightarrow \neg B$}
\end{prooftree}
$$

iv. En ook eens een wat grotere. Probeer deze zelf eens voordat je naar de uitwerking kijkt. We laten zien dat $\neg A \to B, (A \to C) \to \neg\neg A \vdash (\neg B \vee C) \to \neg\neg A$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg B \vee C]^3$}
\AxiomC{$\neg A \to B$}
\AxiomC{$[\neg A]^1$}
\RightLabel{$\to$E}
\BinaryInfC{B}
\AxiomC{$[\neg B]^2$}
\RightLabel{$\neg$E}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\neg$I, 1}
\UnaryInfC{$\neg\neg A$}
\AxiomC{$[C]^2$}
\RightLabel{$\to$I}
\UnaryInfC{$A \to C$}
\AxiomC{$(A \to C) \to \neg\neg A$}
\RightLabel{$\to$E}
\BinaryInfC{$\neg\neg A$}
\RightLabel{$\vee$E, 2}
\TrinaryInfC{$\neg\neg A$}
\RightLabel{$\to$I, 3}
\UnaryInfC{$(\neg B \vee C) \to \neg\neg A$}
\end{prooftree}
$$

Let op de pijl-introductie ($A \to$ C) zonder hypothese.

3.4. Falsum. Jawel, er is een aparte regel voor de falsum! Er bestaat niet zoiets als een falsum-introductie: we willen toch geen onwaarheid kunnen introduceren? Er bestaat echter wel een falsum-eliminatie: logici willen wel graag onwaarheid uit de wereld helpen (hoewel dat niets over hun moreel besef zegt). We hebben dus een $\bot$ en willen daar vanaf. Niets is eenvoudiger: uit het onware volgt immers alles, dus mogen we na falsum concluderen wat we willen! De falsum-eliminatie ziet er dus als volgt uit:

falsum-introductie
$\bot$-introductie
falsum-eliminatie
$\bot$-eliminatie

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\bot$}
\RightLabel{$\bot$E}
\UnaryInfC{A}
\end{prooftree}
$$

Dit is toch wel de kortste regel van het systeem ND. Wellicht ten overvloede: realiseer je dat A een volstrekt willekeurige formule is —'A' hoeft dus niet in de een of andere hypothese voor te komen o.i.d. Je zult deze regel niet vaak hoeven gebruiken —het komt erg weinig voor dat je 'zomaar' een onwaarheid kunt afleiden. Toch zijn er wel voorbeelden van het gebruik van de $\bot$-eliminatie te geven:

Voorbeeld:

i. Een 'toch wel tamelijk nogal standaard' voorbeeld van toepassing van de $\bot$E. We laten zien dat $\neg(\neg A \to B) \vdash \neg A$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A]^1$}
\AxiomC{$[\neg A]^2$}
\RightLabel{$\neg$E}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\bot$E}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{$\to$I, 2}
\UnaryInfC{$\neg A \to B$}
\AxiomC{$\neg(\neg A \to B)$}
\RightLabel{$\neg$E}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\neg$I, 1}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\end{prooftree}
$$

ii. And a big one: $(A \to B) \vee (A \to C), \neg B \vdash (A \vee \neg A) \to (\neg A \vee C)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(A \to B) \vee (A \to C)$}
\AxiomC{$[A \vee \neg A]^4$}
\AxiomC{$[A]^1$}
\AxiomC{$[A \to B]^3$}
\RightLabel{$\to$E}
\BinaryInfC{B}
\AxiomC{$\neg B$}
\RightLabel{$\neg$E}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\bot$E}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\RightLabel{$\vee$I}
\UnaryInfC{$\neg A \vee C$}
\AxiomC{$[\neg A]^1$}
\RightLabel{$\vee$I}
\UnaryInfC{$\neg A \vee C$}
\RightLabel{$\vee$E, 1}
\TrinaryInfC{$\neg A \vee C$}
\AxiomC{$[A \vee \neg A]^4$}
\AxiomC{$[A]^2$}
\AxiomC{$[A \to C]^3$}
\RightLabel{$\to$E}
\BinaryInfC{C}
\RightLabel{$\vee$I}
\UnaryInfC{$\neg A \vee C$}
\AxiomC{$[\neg A]^2$}
\RightLabel{$\vee$I}
\UnaryInfC{$\neg A \vee C$}
\RightLabel{$\vee$E, 2}
\TrinaryInfC{$\neg A \vee C$}
\RightLabel{$\vee$E, 3}
\TrinaryInfC{$\neg A \vee C$}
\RightLabel{$\to$I, 4}
\UnaryInfC{$(A \vee \neg A) \to (\neg A \vee C)$}
\end{prooftree}
$$

Hmm, ze moeten toch niet echt veel groter worden ... Een andere oplossing van deze deductie krijg je door de $\vee$-eliminaties om te draaien: 1 maal $(A \vee \neg A)$ onderaan en 2 maal $(A \to B) \vee (A \to C)$ daarboven. Je kunt ook de onderste pijl-introductie en of-eliminatie omdraaien (waardoor je twee pijl-introducties krijgt), etc., etc. Zoals al eerder gezegd: vaak zijn er meerdere mogelijkheden.

RAA

klassieke Reductio Ad Absurdum

bewijs uit het ongerijmde

indirecte bewijsvoering

3.5. RAA. De laatste regel van het systeem ND formaliseert de klassieke Reductio Ad Absurdum aka RAA), aka het bewijs uit het ongerijmde, aka indirecte bewijsvoering. Bij een bewijs uit het ongerijmde wordt een uitspraak bewezen door te laten zien dat zijn tegendeel tot een tegenspraak (absurdum) leidt. Als je A wilt bewijzen, laat je dus zien dat $\neg A$ een tegenspraak oplevert, waarna je concludeert dat je $\neg A$ dus blijkbaar niet hebt —dus dat je A hebt. Dit klinkt erg als de niet-introductie. De regel RAA lijkt hier dan ook veel op.

$$
\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \nabla \\ \bot\end{array}}{A}\ \mathsf{RAA}
$$

Je kunt RAA ook zien als een versterking van falsum-eliminatie. Immers falsum-eliminatie is het speciale geval van RAA waar nul hypothesen van de vorm ‘negatie van de conclusie’ worden geëlimineerd.

Gouden Tip nr.6:

Velen vinden RAA de lastigste regel uit het systeem ND. Daar is ook wel een reden voor. De $\neg$ als hoofdvoegteken is vrij lastig, omdat hij een hele formule kan ‘opsluiten’: op de hypothese $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$ kun je een $\wedge$E en vervolgens twee $\vee$E's loslaten, maar wat doe je in hemelsnaam met een hypothese $\neg((p \vee q) \wedge (r \vee s))$? Door het toevoegen van de negatie zijn de conjunctie en disjuncties ‘onbereikbaar’ geworden. De niet-introductie is zo vriendelijk zo'n negatie te verwijderen (van beneden naar boven werkend), waardoor onze hypothese (zonder $\neg$) aanmerkelijk hanteerbaarder is dan de conclusie (met $\neg$). RAA is daarentegen zo onvriendelijk het omgekeerde te doen: de conclusie A wordt opeens opgesloten binnen een negatie. We zullen dus vaak een tamelijk lastige hypothese erbij krijgen (welke van bovenstaande twee formules heb je liever als hypothese?)

Toch geen reden tot paniek —zo rampzalig is het nou ook weer niet. Je moet alleen goed weten wanneer je RAA moet gebruiken. Daar is een erg makkelijke tip voor:

gebruik RAA als je echt niet weet wat je anders zou moeten doen —als een laatste redmiddel dus.

Gouden Tip nr.7:

We hebben nu drie deductieregels met een falsum boven de streep: de $\neg$-introductie, de $\bot$-eliminatie en RAA. Hieronder staan ze nog eens op een rij.

$$\begin{array}{c}[A]\\ \bigtriangledown \\ \dfrac{\bot}{\neg A}\ \to\mathrm{I}\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg A]\\ \bigtriangledown \\ \dfrac{\bot}{A}\ \mathsf{RAA}\end{array} \qquad \dfrac{\bot}{A}\ \bot\mathrm{E}$$

Welke regel moet je nou wanneer gebruiken? De $\neg$I en RAA zijn aantrekkelijker dan de $\bot$E, omdat deze twee beide een hypothese opleveren —en hoe meer hypothesen hoe liever. (Zoals gezegd, RAA omvat $\bot$E.) Dus als je een formule tegenkomt die als hoofdvoegteken een $\neg$ heeft en als je denkt dat er boven deze formule een $\bot$ moet staan, ga er dan maar vanuit dat je met een $\neg$I te doen hebt. Idem voor formules die geen $\neg$ als hoofdvoegteken hebben: als je denkt dat er een $\bot$ boven moet staan, ga er dan maar vanuit dat het om een RAA gaat. Als je deze tip volgt, kan het gebeuren dat je, als het bewijs klaar is, ontdekt dat je een hypothese die van een $\neg$I of RAA afkomt niet gebruikt hebt. Dan was het dus geen $\neg$I of RAA maar een $\bot$E. Je kunt dan alsnog de naam van de betreffende stap veranderen. Dus: gebruik in principe geen $\bot$E tot het tegendeel blijkt.

Gouden Tip nr.8:

Wanneer besluit je dat boven een formule een $\bot$ komt te staan —m.a.w. wanneer gebruik je überhaupt één van bovenstaande drie regels? De niet-introductie spreekt voor zichzelf: een $\neg$ als hoofdvoegteken zal meestal een voorafgaande $\neg$I vergen (behalve uiteraard als de betreffende formule uit de hypothesen te verkrijgen is, zoals in het triviale geval $(\neg A \wedge \neg B) \vdash \neg A$). RAA is wat lastiger, omdat je 'het er niet zo makkelijk vanaf ziet'. De 'A' in de RAA-regel kan iedere formule zijn (zonder $\neg$ als hoofdvoegteken). Je gebruikt RAA als je niet verder naar boven kunt werken en je ook geen kans ziet om met de ter beschikking staande hypothesen van boven naar beneden naar de gewenste formule toe te werken—we zullen hier nog voorbeelden van zien. Over de $\bot$E hebben we het al gehad.

Gouden Tip nr.9:

Voor profs en liefhebbers. Ieder bewijs dat (noodzakelijk) gebruik maakt van RAA kan worden vervangen door een equivalent bewijs dat de RAA-regel precies één keer gebruikt en wel in de laatste stap. Als je dus in je bewijs drie keer RAA hebt gebruikt, bestaat er ook een bewijs van dezelfde formule dat maar één keer RAA gebruikt —en dat dan helemaal onderin het bewijs (NB. Dat bewijs hoeft dan echter niet noodzakelijk eenvoudiger of 'logischer' te zijn dan de 3-maal-RAA uitvoering). We hadden deze Tip ook als stelling kunnen opnemen, inclusief het bijbehorende (eenvoudige) bewijs—maar over sommige dingen moet je niet al te gewichtig doen.

Het is weer de hoogste tijd voor wat illustratief materiaal. We laten stap voor stap een 'RAA bewijs' zien.

Voorbeelden:

i. Te bewijzen: $\vdash A \vee \neg A$ (het principe van de Uitgesloten Derde (UD)). Dit is HET prototypische RAA-bewijs bij uitstek! Je moet 'm geblinddoekt en geboeid van achteren naar voren kunnen maken.

   De conclusie die we moeten bewijzen is $A \vee \neg A$ —en dat zonder dat er hypothesen gegeven zijn. Welke stap moet er nu boven $A \vee \neg A$ staan? De eerste impuls is misschien een $\vee$I. Maar dan hebben we boven de streep alleen nog maar een A (of $\neg A$) staan. En aangezien A een volstrekt willekeurige formule is, moeten we dan dus zonder hypothesen een willekeurige formule bewijzen. Het is duidelijk dat dit niet kan. Er kan ook niet zoiets als een $\vee$E staan—we hebben immers geen hypothese waarvan we de $\vee$ kunnen elimineren. Dit is een typische situatie waarin je besluit 'dat het dan wel RAA zal moeten zijn'. We krijgen nu:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\neg(A \vee \neg A)\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{A \vee \neg A}\ \mathsf{RAA}$$

   We hebben nu dankzij RAA de hypothese $\neg(A \vee \neg A)$ erbij gekregen. Wat moet er nu boven de falsum? Een $\neg$E uiteraard (dit is immers de enige regel met een $\bot$ als conclusie). Dit betekent dat boven de $\bot$ een formule X met zijn tegendeel $\neg X$ moet staan. We hébben maar één formule, n.l. $\neg(A \vee \neg A)$, dus die zal het dan moeten worden.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\neg(A \vee \neg A)\\ \vdots \\ A \vee \neg A\end{array} \qquad \neg(A \vee \neg A)}{\bot}\ \neg\mathrm{E}}{A \vee \neg A}\ \mathsf{RAA}$$

   We moeten nu dus $A \vee \neg A$ bewijzen. Maar wacht eens even... dat moesten we in het begin toch ook al? Zijn we nu niet terug bij af? Nee! In het begin hadden we geen enkele hypothese, maar nu heeft de RAA-stap ons een hypothese opgeleverd. Wat komt er nu boven $A \vee \neg A$? We kunnen wel weer een RAA gebruiken, maar daar schieten we niet veel mee op —je kunt oneindig vaak RAA's gaan stapelen, maar dat levert geen nieuwe hypothesen op en verschuift het probleem alleen maar. We hebben een $\vee$ als hoofdvoegteken, dus we kunnen eens proberen wat er gebeurt als we een $\vee$I gebruiken. Boven de streep zetten we $\neg A$ (dat had ook A kunnen zijn, zoals we zullen zien). En deze $\neg A$ vraagt weer om een voorafgaande $\neg$I, die ons vervolgens de hypothese A oplevert:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}A \quad \neg(A\vee\neg A)\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}\,\neg\mathrm{I}}{A\vee\neg A}\,\vee\mathrm{I} \qquad \neg(A\vee\neg A)}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{A\vee\neg A}\,\mathsf{RAA}$$

We hebben nu twee hypothesen en kunnen dus boven de $\bot$ twee verschillende paren zetten: A met $\neg A$, of $(A \vee \neg A)$ met $\neg(A \vee \neg A)$. Als we voor het paar A, $\neg A$ kiezen hebben we een probleem: A is hypothese, $\neg A$ moet nog bewezen worden. Het enige wat we boven deze $\neg A$ zouden kunnen zetten is een $\neg$I —maar dat hebben we al eens gedaan. Dit zou ons dus niets opleveren. We kiezen dan maar voor het tweede paar: $(A \vee \neg A)$ en $\neg(A \vee \neg A)$. We moeten nu dus alweer $A \vee \neg A$ bewijzen. Maar we hebben ook nog een hypothese A, dus een $\vee$I kan dat probleem voor ons oplossen. Ons bewijs is nu klaar. We moeten alleen nog wat hypothesen opheffen.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A\vee\neg A}\,\vee\mathrm{I} \qquad [\neg(A\vee\neg A)]^2}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{\neg A}\,\neg\mathrm{I},1}{A\vee\neg A}\,\vee\mathrm{I} \qquad [\neg(A\vee\neg A)]^2}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{A\vee\neg A}\,\mathsf{RAA},2$$

Zoals gezegd hadden we bij de onderste $\vee$I ook A boven de streep kunnen zetten. De $\neg$I zou dan een RAA worden en de bovenste hypothese $\neg A$ in plaats van A.

ii. Nog een voorbeeldje:

We bewijzen dat $\vdash \neg(A \wedge \neg B) \to (A \to B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad [\neg B]^1}{A\wedge\neg B}\,\wedge\mathrm{I} \qquad [\neg(A\wedge\neg B)]^2}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{B}\,\mathsf{RAA},1}{A\to B}\,\to\mathrm{I},2}{\neg(A\wedge\neg B)\to(A\to B)}\,\to\mathrm{I},3$$

Korte toelichting: de onderste twee stappen spreken voor zich. Deze leveren samen de hypothesen $\neg(A\wedge\neg B)$ en A op. Dan moeten we B bewijzen. Na enig nadenken zien we dat dat niet kan met de hypothesen die ons ter beschikking staan. De enige oplossing is dus RAA te gebruiken, wat de hypothese $\neg B$ oplevert. We moeten nu kiezen wat we boven de $\bot$ zullen zetten: A met $\neg A$ of $\neg(A \wedge \neg B)$ met $A \wedge B$. Het eerste paar lijkt vrij hopeloos: hoe bewijzen we $\neg A$? Het tweede paar leidt ons probleemloos tot de oplossing.

iii. Tot slot nog een hele echte indrukwekkende... We laten zien dat:
$\vdash \neg(A \to B) \vee (\neg A \vee B)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A]^1$}
\AxiomC{$[A \to B]^2$}
\RightLabel{$\to$E}
\BinaryInfC{B}
\RightLabel{$\vee$I}
\UnaryInfC{$\neg A \vee B$}
\RightLabel{$\vee$I}
\UnaryInfC{$\neg(A \to B) \vee (\neg A \vee B)$}
\AxiomC{$\neg(\neg(A \to B) \vee (\neg A \vee B))$}
\RightLabel{$\neg$E}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$\neg$I, 2}
\UnaryInfC{$\neg(A \to B) \vee (\neg A \vee B)$}
\AxiomC{$[\neg(\neg(A \to B) \vee (\neg A \vee B))]^3$}
\RightLabel{$\neg$E}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{RAA, 3}
\UnaryInfC{$\neg(A \to B) \vee (\neg A \vee B)$}
\end{prooftree}
$$

Helemaal onderaan kunnen we niet met een $\vee$I beginnen. We zouden dan namelijk één van de disjuncten moeten bewijzen —zonder hypothesen. Dit kan alleen als één van de disjuncten een tautologie is en aangezien dat niet het geval is ... De enige oplossing is dus RAA (hoezo levert dat een vervelende hypothese op?). Probeer verder zelf deze deductie te begrijpen (N.B. er bestaan echt nog wel langere deducties hoor).

3.6. ND versus NDi. We hebben nu het volledige systeem ND leren kennen. Rest ons tot slot van onze kennismaking met de propositielogica nog een korte filosofische beschouwing. Naast het systeem ND, dat geënt is op de zgn. klassieke logica, bestaat er een ander natuurlijk deductie systeem: NDi. Het systeem NDi is identiek aan ND, behalve dat het de regel RAA niet kent. De 'i' van NDi staat voor 'intuïtionistisch'. Het intuïtionisme of constructivisme is een stroming in de logica, die vindt dat een bewijs van bijvoorbeeld een propositielogische formule constructief moet zijn. Het zou te ver voeren om precies uit te leggen wat dit 'constructief' feitelijk inhoudt, maar het komt er eenvoudig gezegd op neer dat een bewijs moet laten zien dat je de formule 'echt hebt' —je mag geen bewijzen 'via de achterdeur' leveren. RAA is nu precies een regel die zulke 'achterdeurbewijzen' oplevert.

intuïtionisme
constructivisme

Opmerking 3.1. Het intuïtiomisme is gecreëerd door de grote Nederlandse wiskunde Luitzen Egbertus Johannes Brouwer in de eerste helft van de vorige eeuw. Zie de prachtige biografie van Brouwer geschreven door Dirk van Dalen: [**vD01**]. □

Het intuïtionistische idee is dat je een formule A opvat als de bewering 'ik heb een bewijs voor A'. De negatie van A betekent dat je een bewijs hebt dat er geen bewijs van A *kan* zijn. Als je uit $\neg A$ kunt afleiden dat $\perp$, dan heb je dus ingezien dat er onmogelijk een bewijs kan zijn dat A niet bewezen *kan* worden. Maar dan weet je nog niet dat A zo is —en dat is precies de conclusie die middels de regel RAA wel getrokken wordt: $\neg A$ leidt tot een tegenspraak (falsum), dus concluderen we A. In het intuïtionisme is RAA daarom geen geldige regel. Een intuïtionist kan hooguit zeggen dat als $\neg A$ tot een tegenspraak leidt, je dan $\neg\neg A$ hebt met ($\neg$-introductie).

Met het niet toestaan van RAA worden opeens veel bewijzen die in de klassieke logica geldig zijn, ongeldig (namelijk alle bewijzen die RAA nodig hebben). Met name het principe van de uitgesloten derde ($A \vee \neg A$ (UD)) is niet langer geldig, evenmin als het schijnbaar toch zo voor de hand liggende $\neg\neg A \vdash A$, oftewel $\neg\neg$-eliminatie.

$\neg\neg$-eliminatie

Ook de equivalenties van de wetten van de Morgan gelden niet langer. We zullen soms dit onderscheid tussen klassieke en intuïtionistische bewijzen expliciet maken door aan de turnstile een superscript 'i' toe te voegen: $A \vdash^{\mathsf{i}} B$ betekent dus dat B uit A afleidbaar is in een intuïtionistisch systeem. Voor ons betekent dat, dat je een natuurlijke deductie van B kunt maken, met hypothese A, zonder dat je RAA gebruikt (zie opgave 7). Als er geen 'i' bij de turnstile staat wil dat echter nog niet zeggen dat je RAA dus wél moet gebruiken.

Opmerking 3.2. De intuïtionist eist dat een bewijs van een disjunctie de informatie bevat welk van de disjuncts bewijsbaar is. Dat geeft ons ook een manier om te begrijpen dat U ongeldig is: we kunnen i.h.a. niet zeggen wel van de twee disjuncts A, $\neg A$ geldig is.

Tot slot laten we zien dat de regels RAA, UD en $\neg\neg$E equivalent zijn: als we een intuïti-onistisch ND-systeem hebben en we voegen daar de regel RAA aan toe, dan krijgen we een klassiek ND-systeem. Het toevoegen van UD of $\neg\neg$E zou echter net zo goed een klassiek systeem opleveren. Het komt er dus op neer dat we met één van deze drie regels de andere twee kunnen nabootsen—oftewel 'ze doen effectief hetzelfde'. Voor we dit laten zien nog een detail: UD is geen afleidingsregel, maar een axioma. UD zegt dat iedere formule waar of onwaar is: dit principe levert je voor iedere formule een hypothese op: $(A \vee \neg A)$ is het geval, maar ook $(B \vee \neg B)$ en $(C \vee \neg C)$ en... We noteren UD dan ook als een hypothese met een streep erboven —het is geen echte hypothese, maar een uitgangspunt. In voorbeeld (i) van de voorgaande paragraaf hebben we al laten zien dat je UD kunt bewijzen met RAA. Dat bewijs herhalen we hier dus niet. We laten nu zien hoe je de stap RAA kunt simuleren als je UD als principe mag hanteren, oftewel uit UD 'volgt 'RAA'.

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vee \neg A}\,\mathsf{UD} \qquad [A]^1 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]^1\\ \nabla\\ \bot\end{array}}{A}\,\bot\mathrm{E}}{A}\,\vee\mathrm{E}, 1$$

Hieronder laten we zien dat resp. RAA en $\neg\neg$E uit elkaar 'volgen'.

$$\dfrac{\dfrac{[\neg A]^1 \qquad \neg\neg A}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{A}\,\mathsf{RAA}, 1 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]^1\\ \nabla\\ \bot\end{array}}{\neg\neg A}\,\neg\mathrm{I}, 1}{A}\,\neg\neg\mathrm{E}$$

En dit was het dan wat de propositielogica betreft. Geachte luisteraar, bedankt voor uw aandacht en tot de volgende voorstelling in which you'll hear doctor Bob say: 'Arf'.

4. Samenvatting

En:

$$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge\mathrm{I} \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\ \wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\ \wedge\mathrm{E}$$

Of:

$$\dfrac{A}{A \vee B}\ \vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\ \vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \bigtriangledown\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \bigtriangledown\\ C\end{array}}{C}\ \vee\mathrm{E}$$

Als ... dan:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \bigtriangledown\\ B\end{array}}{A \to B}\ \to\mathrm{I} \qquad \dfrac{A \quad A \to B}{B}\ \to\mathrm{E}$$

Desda:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \bigtriangledown\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \bigtriangledown\\ A\end{array}}{A \leftrightarrow B}\ \leftrightarrow\mathrm{I} \qquad \dfrac{A \quad A \leftrightarrow B}{B}\ \leftrightarrow\mathrm{E} \qquad \dfrac{B \quad A \leftrightarrow B}{A}\ \leftrightarrow\mathrm{E}$$

Niet:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \bigtriangledown\\ \perp\end{array}}{\neg A}\ \neg\mathrm{I} \qquad \dfrac{A \quad \neg A}{\perp}\ \neg\mathrm{E}$$

Falsum:

$$\dfrac{\perp}{A}\ \perp\mathrm{E}$$

RAA

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \bigtriangledown\\ \perp\end{array}}{A}\ \mathsf{RAA}$$

5. Opgaven

Maak natuurlijke deducties voor de volgende beweringen:

1. $\wedge$:
   i. $A \wedge B \vdash A \wedge ((B \wedge A) \wedge B)$
   ii. $A \wedge (B \wedge C) \vdash ((A \wedge B) \wedge C) \wedge C$
   iii. $A \wedge (B \wedge C) \vdash ((A \wedge C) \wedge B) \wedge (C \wedge A)$

2. $\vee$:
   i. $A \vee B \vdash (B \vee A) \vee (A \vee B)$
   ii. $A \vee B \vdash (B \vee A) \vee A$
   iii. $A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$
   iv. $A \vee (B \vee C) \vdash ((A \vee C) \vee B) \vee (C \vee A)$
3. $\wedge$, $\vee$:
   i. $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
   ii. $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   iii. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$
   iv. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$
4. $\to$:
   i. $\vdash A \to A$
   ii. $\vdash (A \to A) \to (A \to A)$
   iii. $\vdash (A \to B) \to (A \to B)$
   iv. $\vdash B \to (A \to A)$
   v. $B \vdash (B \to A) \to A$
   vi. $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$
   vii. $A \to (B \to C) \vdash (B \to A) \to (B \to C)$
   viii. $\vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
5. $\leftrightarrow$:
   i. $\vdash A \leftrightarrow A$
   ii. $\vdash (A \leftrightarrow A) \leftrightarrow (A \leftrightarrow A)$
   iii. $\vdash (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$
6. $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$:
   i. $\vdash (A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$
   ii. $\vdash (A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$
   iii. $A \to (B \to C) \vdash (A \wedge B) \to C$
   iv. $(A \wedge B) \to C \vdash A \to (B \to C)$
   v. $\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$
   vi. $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
   vii. $\vdash ((A \to B) \wedge (B \to A)) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$
   viii. $\vdash (A \to (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \to B) \wedge (A \to C))$

7. Alle regels, behalve RAA:
   i. $\vdash_{\mathsf{i}} \neg(A \wedge \neg A)$
   ii. $\vdash_{\mathsf{i}} \neg\bot$
   iii. $\vdash_{\mathsf{i}} \bot \to A$
   iv. $\vdash_{\mathsf{i}} \neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A$
   v. $\vdash_{\mathsf{i}} (A \to \neg A) \to \neg A$
   vi. $\vdash_{\mathsf{i}} (\neg A \to A) \to \neg\neg A$
   vii. $(\neg\neg A \to A) \to A \vdash_{\mathsf{i}} \neg\neg A$
   viii. $A \vdash_{\mathsf{i}} \neg(\neg A \wedge \neg B)$
   ix. $\vdash_{\mathsf{i}} \neg A \leftrightarrow (A \to \bot)$
   x. $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \vdash_{\mathsf{i}} \neg A$
   xi. $(A \vee \neg A) \vdash_{\mathsf{i}} (A \to B) \vee (B \to A)$
8. Met RAA:
   i. $\vdash A \leftrightarrow \neg\neg A$
   ii. $\vdash A \vee (B \vee \neg B)$
   iii. $\vdash (A \to \neg\neg A) \leftrightarrow (A \vee \neg A)$
   iv. $\vdash (\neg A \to A) \to A$
   v. $\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
   vi. $\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
   vii. $\vdash (A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
   viii. $\vdash (A \wedge B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
   ix. $(A \wedge C) \vdash \neg(\neg B \wedge \neg C)$
   x. $\vdash (A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(A \to B)$
   xi. $\vdash (\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \to B)$
   xii. $\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$
   xiii. $\vdash ((A \vee B) \to C) \leftrightarrow ((A \to C) \wedge (B \to C))$
   xiv. $\vdash ((A \wedge B) \to C) \leftrightarrow ((A \to C) \vee (B \to C))$
   xv. $(A \to \neg B) \to C \vdash (A \wedge B) \vee C$
   xvi. $\vdash ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$
   xvii. $\vdash ((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)) \leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow B)$
   xviii. $\vdash ((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)) \leftrightarrow (A \leftrightarrow \neg B)$

Bibliografie

[BPJ02] G.S. Boolos, Burgess P., and R. Jeffrey. *Computability and Logic, Fourth Edition*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2002.

[Dal04] D. van Dalen. *Logic and Structure*. Berlijn, Springer, 2004.

[End04] Herbert B. Enderton. *A mathematical introduction to logic*. Academic Press, 2004.

[Fre75] G. Frege. Über Sinn und Bedeutung. pages 40–65. Vandenhoeck and Ruprecht, 1975. also reprinted in e.g. [**Har94**, pp. 142–160].

[Fre98] G. Frege. Begriffsschrift. In Ignacio Angelelli, editor, *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, pages 1–88. Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1998.

[Har94] R.M. Harnish. *Basic Topics in the Philosophy of Language*. Harvester Wheatsheaf, New York, 1994.

[Mon70] R. Montague. Universal grammar. *Theoria*, 36:373–398, 1970.

[Qui37] Willard Van Orman Quine. New Foundations for Mathematical Logic. *American Mathematical Monthly*, 44:70–80, 1937.

[RW70] Bertrand Russell and Alfred North Whitehead. *Principia Mathematica to* $*56$. Cambridge at the University Press, London, 1970.

[vD01] Dirk van Dalen. *Brouwer 1881–1966, een biografie, het heldere licht van de wiskunde*. Bert Bakker, Amsterdam, 2001.

[Wit61] L. Wittgenstein. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Routledge & Kegan Paul, London, 1961.