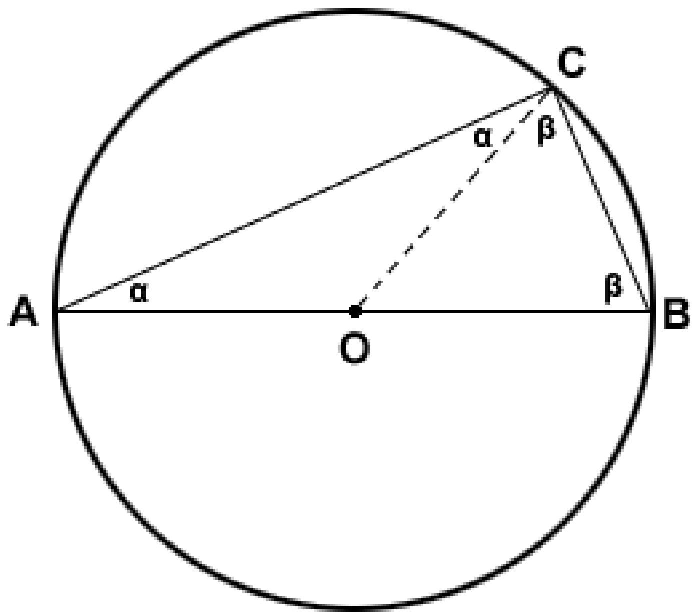
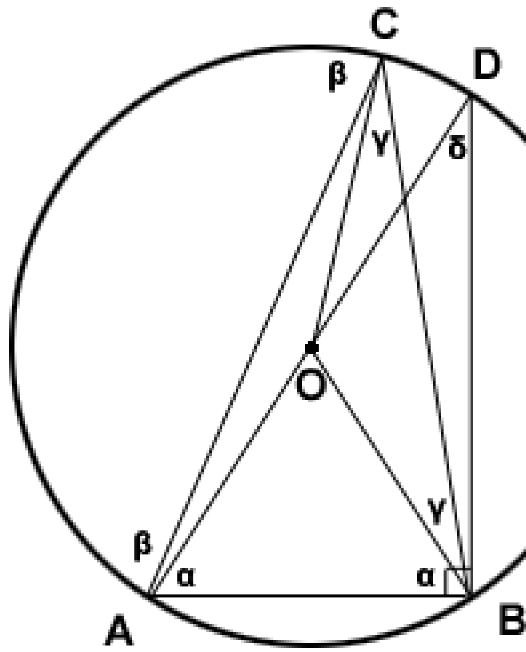
Wiskunde voor CKI, Uitwerking meetkundige opgaven
25.11.2004

Opgave 1. *Een driehoek ABC is getekend in een cirkel zodat het centrum O op de zijde AB ligt. Bewijs dat de hoek $\angle ACB$ een rechte hoek is.*



Bewijs. Wij trekken de lijn OC. Uit de definitie van de cirkel volgt het dat $|OA| = |OB| = |OC|$. Daarom zijn ook de hoeken gelijk $\angle OAC = \angle OCA$ en $\angle OBC = \angle OCB$. Wij hebben $2\alpha + 2\beta = \pi$, waar $\alpha = \angle OAC$ en $\beta = \angle OBC$. Dus $\angle ACB = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Opgave 2. *Gegeven is een cirkel met het centrum O en een chord AB. Beschouw alle driehoeken ABC in de cirkel, die dezelfde zijde AB hebben en waarbij C aan dezelfde kant van de lijn AB en op de cirkel ligt. Dan is de hoek $\angle ACB$ altijd dezelfde.*



Bewijs. Beschouw een willekeurige punt C op de cirkel en de driehoek ABC. Nemen wij aan dat O binnen de driehoek ligt. (Beschouw zelf het andere geval als het niet zo is.) Trek de lijn AO en noteer de andere intersectiepunt van AO met de cirkel als D. Wij willen aantonen dat $\angle ADB$ gelijk is aan $\angle ACB$. Omdat D niet van de keuze van C afhankelijk is wordt ermee de stelling bewezen.

Noteer de hoeken $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$, $\angle OAC = \angle OCA = \beta$, $\angle OBC = \angle OCB = \gamma$, $\angle ODB = \delta$. Dan geldt $\pi = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma$. Dus, de hoek $\angle ACB = \gamma + \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Van opgave 1 weten wij dat $\angle ABD = \frac{\pi}{2}$. Dan geldt $\alpha + \delta = \frac{\pi}{2}$ en dus $\angle ACB = \frac{\pi}{2} - \alpha = \delta$.