Oefenopgaves Wiskunde voor AI

9 januari 2005

Week 3

1 Reflexief:	$\forall x\ (xRx)$
2 Transitief:	$\forall x, y, z\ ((xRy \text{ en } yRz) \Rightarrow xRz)$
3 Symmetrisch:	$\forall x, y\ (xRy \Rightarrow yRx)$
4 Anti-symmetrisch:	$\forall x, y\ ((xRy \text{ en } yRx) \Rightarrow (x = y))$
5 Lineair:	$\forall x, y\ (xRy \text{ of } y = x \text{ of } yRx)$

Opgave 1.

Geef aan van onderstaande binaire relaties welke van de bovenstaande eigenschappen ze hebben.

a.
$R = \{\langle x, y\rangle : (x, y \in \mathbb{N}) \text{ en } (x = y)\}$

b.
$R = \{\langle x, y\rangle : (x, y \in \mathbb{R}) \text{ en } (x > y)\}$

c.
$R = \{\langle x, y\rangle : (x, y \in \text{alphabet}) \text{ en } ((x \text{ is een klinker}) \text{ of } (y \text{ is een klinker}))\}$

d.
$R = \{\langle x, y\rangle : (x, y \in \mathbb{N}) \text{ en } (x \text{ modulo } y = 0)\}$

e.
$R = \{\langle x, y\rangle : (x, y \text{ zijn verzamelingen}) \text{ en } (x \subset y)\}$

f.
$R = \{\langle x, y\rangle : (x, y \in \mathbb{N}) \text{ en } (x + 1 = y)\}$

g.
$R = \emptyset$

Opgave 2.

Laat zien dat gegeven de relatie R uit **1.a** geldt : $\mathbb{N}/R = \mathbb{N}$.

Opgave 3.

Een relatie is euclidisch als geldt:
$\forall x, y((xRy \text{ en } xRz) \Rightarrow yRz)$

a.
Laat zien dat als een relatie euclidisch en reflexief is, deze relatie automatisch ook symmetrisch en transitief (en dus een equivalentie relatie) is.

b.
Geef een voorbeeld van een relatie (met een domein) die euclidisch, maar niet reflexief is.

Opgave 4. Berekenen van $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. Inleveropgave: 1 en 2.

Gegeven is een eindige verzameling A met $|A| = n$ en een getal $k < n$. B is de verzameling van alle injectieve functies $f : \{1, \ldots, k\} \to A$.

1. Laat zien dat $|B| = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.
2. Voor twee functies $f_1, f_2 \in B$ defineer $f_1 R f_2$ als $rng(f_1) = rng(f_2)$. Laat zien dat R is een equivalentierelatie op B.
3. Laat zien dat elke equivalentieklas van R heeft $k!$ elementen: for elke $f \in B$ geldt $|\{g \in B : fRg\}| = k! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k$.
4. Concludeer dat het aantal deelverzamelingen van A van k elementen is $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.