Oefenopgaves Wiskunde voor AI

Week 1

Opgave 1.

Bewijs dat $\sqrt{3}$ een irrationeel getal is. (Dwz: dat er geen natuurlijke getallen p en q waarvoor geldt: $p/q = \sqrt{3}$.

Uitwerking:

We zullen laten zien dat als we aannemen dat $\sqrt{3}$ een rationeel getal is er dan een tegenspraak ontstaat. Hieruit kunnen we concluderen dat $\sqrt{3}$ geen rationeel getal kan zijn.

Stel $\sqrt{3}$ is een rationeel getal. Dan volgt $\sqrt{3} = p/q$.
p en q zijn natuurlijke getallen. Verder nemen we aan dat de breuk p/q zo ver mogelijk vereenvoudigd is. p en q hebben dan geen gemeenschappelijke deler.

$\sqrt{3} = p/q \Rightarrow$
$3 = (p/q)^2 \Rightarrow$
$3 = p^2/q^2 \Rightarrow$
$3q^2 = p^2 \Rightarrow$
$q^2 = p^2/3$

q (en dus q^2) is een natuurlijk getal, blijkbaar is p^2 "deelbaar door 3". Dat wil zeggen: $p^2/3$ is een natuurlijk getal, of: $(p^2/3) \in \mathbb{N}$.

Wij beweren nu dat p ook deelbaar door 3 moet zijn.

Elk natuurlijk getal p kan geschreven worden als $p = 3m$ of $p = 3m + 1$ of $p = 3m + 2$ voor een bepaalde $m \in \mathbb{N}$.

Als $p = 3m$ dan is p deelbaar door 3.

Als $p = 3m + 1$ dan is

$$p^2 = (3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1.$$

Dus, p^2 is niet deelbaar door 3: anders $p^2 = 3k$ en $1 = p^2 - 3(3m^2 + 2m) = 3(k - 3m^2 + 2m)$. Dus 1 is deelbaar door 3, quod non.

Als $p = 3m + 2$ dan is

$$p^2 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1.$$

Dit betekent dat p^2 ook niet deelbaar door 3 is.

Dus, wij hebben bewezen dat als p^2 deelbaar door 3 is, dan is ook p deelbaar door 3.

Wij defineren nu p' als $p/3$.

$p/3 = p' \Rightarrow$
$p = 3p' \Rightarrow$
$3q^2 = (3p')^2 \Rightarrow$
$3q^2 = 9(p')^2 \Rightarrow$
$q^2 = 3(p')^2 \Rightarrow$
$q^2/3 = (p')^2 \Rightarrow$

p' is een natuurlijk getal, dus blijkbaar is $q^2/3$ dat ook. We kunnen dezelfde redenering als hierboven voor $p^2/3$ hier gebruiken om aan te tonen dat $q/3 \in \mathbb{N}$.

We hebben uit de originele aannames geconcludeerd dat $p/3 \in \mathbb{N}$ en $q/3 \in \mathbb{N}$, maar we hadden ook gesteld dat p/q al zover mogelijk vereenvoudigd was. Dit is met elkaar in tegenspraak, dus onze eerste aanname dat $\sqrt{3}$ een rationeel getal is kan niet waar zijn. $\sqrt{3}$ is dus een irrationeel getal.