Logika 2 voor filosofen, tussentoets

Basisdoctoraal, najaar 2001

Opgave 1. Bewijs met natuurlijke deductie dat

- $\vdash ((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$,
- $\vdash ((A \vee B) \wedge \neg A) \to B$,
- $\vdash A \vee \neg A$. (Niet constructief!)

Opgave 2. Ter herinnering: $a^0 = 1$ en $a^{n+1} = a \cdot a^n$ indien $a > 0$. Dus, $3^0 = 1$ en $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Hier drie sommetjes met exponentiatie.

1.) Bereken 2^4.

2.) Bereken $(\frac{1}{2})^4$. Het is inderdaad zo dat $(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^n}$ voor alle $n \in N$. Dit mag in de rest van deze opgave gebruikt worden.

3.) Voorbeeld: $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$.
Herschrijf zelf $-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ tot één breuk.

Bewijs nu met inductie dat voor alle natuurlijke getallen n geldt

$$\Sigma_{i=0}^{n}(\frac{1}{2})^i = 2 - (\frac{1}{2})^n.$$

Denk aan onze mantra!

Opgave 3. Geef de formele definities van $\Gamma \vdash \varphi$ en $\Gamma \models \varphi$ in termen van valuatie's, bewijzen met bijbehorende conclusie, en open aannamen.

Opgave 4. Formuleer de eerste onvolledigheidsstelling van Gödel.

Opgave 5. Stel dat $\vdash \psi \to \neg\psi$ en $\vdash \neg\psi \to \psi$ (onze definitie van een paradox in het eerste college). Laat zien dat $\vdash \bot$. (Aanwijzing: als we weten dat $\vdash \psi \to \neg\psi$ hebben we dus een bewijs $\begin{array}{c} D_0 \\ \psi \to \neg\psi \end{array}$. Dit bewijs mogen we gebruiken om een bewijs voor $\bot$ te maken.)