Opgaven Logika 2 voor filosofen

Basisdoctoraal, najaar 2001

Week 4

Opgave 0. Bewijs met behulp van definitie 1.2.1. van valuatie's uit Ls dat voor elke valuatie v geldt:

- $v(\varphi \wedge \psi) = 1 \Leftrightarrow (v(\varphi) = 1$ én $v(\psi) = 1)$
- $v(\varphi \vee \psi) = 1 \Leftrightarrow (v(\varphi) = 1$ of $v(\psi) = 1)$
- $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1 \Leftrightarrow ($ Als $v(\varphi) = 1$ dan $v(\psi) = 1)$
- $v(\neg\varphi) = 1 \Leftrightarrow (v(\varphi) \neq 1)$

Opgave 1. Laat zien dat $\Gamma \vdash B$ indien $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ en $\Gamma \vdash A$.

Opgave 2. De verzameling van geordende paren van natuurlijke getallen geven we aan met N^2. Wiskundig gezegd $N^2 := \{(n, m) \mid n, m \in N\}$. We zien dus dat $(0, 0) \in N^2$, $(3, 5) \in N^2$, $(112, 8) \in N^2$, $(7, 32) \in N^2$, et cetera. Ook weten we dat bijvoorbeeld $(\frac{1}{6}, -23) \notin N^2$. Geef een opsomming van N^2. Met andere woorden, beschrijf een manier hoe we N^2 kunnen opsommen zodat uiteindelijk ieder element aan de beurt komt.

Opgave 3. Laat zien dat $\vdash A \wedge B \;\Leftrightarrow \vdash A$ én $\vdash B$. Bewijs dat we niet hebben dat $\vdash A \vee B \;\Leftrightarrow \vdash A$ óf $\vdash B$. (Als we ons zouden beperken tot constructieve bewijzen dan zouden we deze zogenaamde disjunctie-eigenschap wel hebben.) De equivalentie is niet geldig maar een deel van de equivalentie wel. Is dat $\Leftarrow$ of $\Rightarrow$?

Opgave 4. Bewijs met natuurlijke deductie:

- $\vdash (B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow \neg A))$. Er is een bewijs met maar twee stappen (toepassingen van regels) mogelijk.
- $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$.
- $\vdash (A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C)$.

Opgave 5. Bekijk welke van de volgende verzamelingen consistent zijn:

1. $\{(\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_0, p_1 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow p_2), p_0 \rightarrow \neg p_2, \neg p_2 \rightarrow p_0\}$,
2. $\{p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_3 \rightarrow \neg p_0\}$,
3. $\{p_0 \rightarrow p_1, p_0 \wedge p_2 \rightarrow p_1 \wedge p_3, p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \rightarrow p_1 \wedge p_3 \wedge p_5, p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \wedge p_6 \rightarrow p_1 \wedge p_3 \wedge p_5 \wedge p_7, \ldots\}$. Kun je een goede definitie geven van deze laatste verzameling zinnen zonder dat de puntjes ... worden gebruikt?

Opgave 6. Laat zien dat de volgende uitspraken equivalent zijn.

A $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ is consistent.

B $\nvdash \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$.

C $\nvdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1}) \rightarrow \neg\varphi_n$.

Opgave 7. Zij Γ een maximaal consistente verzameling propositionele formules. Laat zien dat $\Gamma \models \neg\varphi \;\Leftrightarrow\; \neg\varphi \in \Gamma$ indien $\Gamma \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \varphi \in \Gamma$ en $\Gamma \models \bot \;\Leftrightarrow\; \bot \in \Gamma$. Dit is dus een stap uit het inductieve bewijs van de volledigheid van de propositielogica.

Opgave 8. Zij D_0 het volgende bewijs:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \\ D_1 \\ A \vee B \end{array} \quad \begin{array}{c} [A]_1 \\ D_2 \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B]_2 \\ D_3 \\ C \end{array}}{C} \vee E_{1,2}.$$

Bewijs dat
$\mathcal{A}(D_0) \models \mathcal{C}(D_0)$.
Je mag hierbij de volgende " feiten" gebruiken:
$\mathcal{A}(D_1) \models \mathcal{C}(D_1)$,
$\mathcal{A}(D_2) \models \mathcal{C}(D_2)$ en
$\mathcal{A}(D_3) \models \mathcal{C}(D_3)$.
Dit is dus een stap uit het inductieve bewijs van de correctheid van de propositielogica.