Logica en Filosofie

Logica en filosofie, wat hebben die met elkaar van doen?

- Logica en redeneren is het gereedschap van de filosofie. Daarom moet de filosoof logisch goed onderlegd zijn. Bovendien is het belangrijk te weten hoe dit redeneren geformaliseerd kan worden, d.w.z. een (formeel) systeem geven dat precies aangeeft wat een geldige redenering is en wat niet. Zo'n formeel systeem zullen wij bestuderen. Dan moeten wij ons eerst vastleggen op een bepaalde taal met een bepaalde uitdrukkingskracht. Deze taal zal in ons geval zijn de taal van de eerste orde- of ook wel predikatenlogica. Ook zullen we nauwkeurig de taal van de propositielogica onder de loupe nemen. De bijbehorende redeneersystemen zijn die van natuurlijke deductie met regels zoals $\frac{A \to B \quad\quad A}{B}$. Als we eenmaal een formeel systeem hebben kan dit systeem zelf onderwerp van studie worden. We kunnen nu dus redeneren over het redeneren en hier bijvoorbeeld de beperkingen van onderzoeken.

- De logica bestudeert begrippen die van nature een filosofisch gehalte lijken te hebben. Typische vragen binnen de logica gaan bijvoorbeeld over de uitdrukkingskracht van een taal. Welke begrippen in de (mathematische) "werkelijkheid" kan ik in mijn taal beschrijven? Deze "werkelijkheid" refereert aan de semantiek van mijn taal. In de wiskundige logica zijn dit wiskundige modellen zoals bijvoorbeeld de structuur van de natuurlijke getallen N, of het platte vlak R^2 et cetera. Een beroemd resultaat van deze aard is de "niet definieerbaarheid van het waarheidsbegrip" van Alfred Tarski. Deze zegt dat er in de taal van de eerste orde logica geen formule $\mathrm{Tr}(x)$ kan bestaan zo dat

  $$N \models \mathrm{Tr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \Leftrightarrow N \models \varphi.$$

  (Merk op dat we hiervoor syntax, i.e. formules, moeten coderen in de taal van N om sowieso $\mathrm{Tr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ op te kunnen schrijven. Deze techniek komt veel voor in de metamathematica en hebben we aan Kurt Gödel te danken.) 'Hier hebben we dus duidelijk een resultaat dat lijkt te gaan over iets waar filosofen zich ook voor interesseren: 'In hoeverre kan ik in mijn taal over de waarheid spreken?'. Het is nu goed om je te bedenken dat de werkelijkheid waar de filosoof het over wil hebben een hele andere is dan die van de mathematische logica. In hoeverre hebben dit soort logische resultaten dan ook een filosofisch gehalte? Er zijn filosofen zoals bijvoorbeeld Łukasewicz die menen dat dit gehalte nihil is. Ik wil mij hier niet verder over uitlaten maar het is legitiem om te constateren dat de mathematische logica een "model" is van een deel van de filosofie en dat is op zich al interessant. In deze vorm van interactie zien we dus dat de logica voer is voor filosofen. We zullen zien dat er ook een werking de andere kant op is. Maar eerst nog een resultaat van hetzelfde soort.

Een centrale vraag binnen de mathematische logica is ook de relatie tussen bewijsbaarheid en geldigheid. Bewijsbaarheid refereert hier naar bewijsbaarheid binnen een formeel systeem, bijvoorbeeld dat van natuurlijke deductie. Geldigheid refereert hier naar de waarheid van een uitspraak in een bepaald model of een bepaalde klaase van modellen. Bedenk weer dat dit wiskundige modellen zijn. Met een beetje (boel) lef zou je deze centrale vraag in de logica kunnen herformuleren als "Wat kan een formeel systeem (computer, de mens?) van de werkelijkheid zien?" Als typische voorbeelden van resultaten die zich over deze vraag uitlaten zou ik twee beroemde resultaten van Kurt Gödel willen noemen. Het eerste is zijn volledigheidsstelling uit 1930. Deze zegt:

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi.$$

We zien dat volgens deze stelling de begrippen van afleidbaarheid ($\vdash$) en die van geldigheid ($\models$) in hun extensie samen vallen. Dus φ is afleidbaar in ons formeel systeem uit de aannamen in Γ als φ altijd waar is wanneer Γ dat is en andersom. Dit is positief en verheugend nieuws, maar hoe valt het te rijmen met Gödel's beroemde eerste onvolledigheidsstelling uit 1931 welke zegt dat we nooit alle informatie over de structuur van de natuurlijke getallen uit een redelijk axiomatisch systeem kunnen deduceren. Quasi formeel opgeschreven:

Voor elk redelijk axiomatisch systeem T dat over de natuurlijke getallen handelt is er een zin φ_T zó dat

$$N \models \varphi_T \quad \text{maar} \quad T \nvdash \varphi_T \text{ en } T \nvdash \neg\varphi_T.$$

Weer met een boel lef, zou men dit kunnen interpreteren als een uitspraak die beweert dat een "bewustzijnsvorm" (een formeel systeem) nooit alles van de "werkelijkheid" (de natuurlijke getallen) kan inzien (bewijzen). Er zijn filosofen die aan de eerste onvolledigheidsstelling van Gödel grote en vergaande filosofische conclusies verbinden. Een voorbeeld hiervan is G. Lucas. Albert Visser zal in de werkgroep hierover spreken en discussieren.

- Een ander gebied waar de wiskunde, de logica en de filosofie gedeelde interesse hebben is daar waar het de grondslagen van de wiskunde betreft. 'Wiskunde' is een woord dat door Simon Stevin is bedacht als vertaling van 'matematica' in het latijn. De 'wis' heeft hier betrekking op de zekerheid als in 'wis en waarachtig' of 'ik ben mij daar van gewis'. Wiskunde houdt zich dus bezig met zekere kennis waar geen emperische kennis in lijkt te zijn verwerkt. In de praktijk komt dit er op neer dat complexe uitspraken over wiskundige entiteiten via kleine deductie stapjes worden teruggevoerd tot logische gevolgen van onomstotelijk ware uitspraken zoals bijvoorbeeld $\forall x(x + 0 = x)$. Deze grondbeginselen zijn de zogenaamde axioma's en zijn danig simpel van aard dat men de waarheid hiervan meteen inziet. Lang is men in de wiskunde niet al te precies geweest met het bijhouden van wat nu precies de basisaannamen waren in welk systeem. In bepaalde delen van de wiskunde was men echter wel zeer precies met het formuleren van de axioma's. Voor het eerst in de geschiedenis van de wiskunde is er sprake van een axiomatische aanpak in "De Elementen" van Euclides (ongeveer 300 v.C.). Dit werk handelt over de meetkunde. In de loop van de geschiedenis van de wiskunde is men zich steeds meer over de axiomas van de verschillende systemen gaan bekommeren. Ik noem drie redenen waarom.

1. Systemen bewezen te weinig. Een goed voorbeeld hiervan is de Euclidische meetkunde. De Euclidische meetkunde is het axiomatisch systeem dat Euclides in "De Elementen" gebruikt om de meetkunde van het platte vlak mee te beschrijven. De axioma's waren zodanig gekozen dat zij evident geldig zijn en deze evidentie ook direct kan worden ingezien. Één axioma nam daarin een bijzonder plaats: het parallellen postulaat. Dit was namelijk minder evident dan de andere axioma's. Lang heeft men dan ook geprobeerd om uit de ander axioma's het parallellen postulaat te bewijzen. Dit postulaat zegt dat gegeven een lijn l in het vlak en gegeven een punt p niet op die lijn l, er precies één lijn l' is die door p gaat en evenwijdig loopt aan l. Na vele pogingen om dit postulaat uit de andere axioma's te bewijzen, werd uiteindelijk in de negentiende eeuw bewezen dat dit postulaat onafhankelijk is van de andere axioma's. Het valt dus noch te bewijzen, noch te weerleggen. Hiermee was dus ook aangetoond dat het systeem van axioma's onvolledig was. Er zijn modellen te geven waar het paralellen postulaat niet geldig is. Dit voorbeeld heeft aangezet tot een systematische studie naar de bewijskracht van een formeel systeem in vergelijking tot de beoogde structuur. We zien hier weer de relatie tussen bewijsbaarheid en geldigheid opduiken.
2. Systemen bewezen te veel. Feitenlijk konden de systemen alles bewijzen, m.a.w. er was sprake van inconsistentie. Rond de overgang van de negentiende naar de twintigste eeuw werd de wiskunde geteisterd door paradoxen. Zo was er in de verzamlingenleer de paradox van Cantor. Volgens een stelling van Cantor is de machtsverzameling van een verzameling altijd "groter" dan de verzameling zelf. In wiskundige taal $\mathcal{P}(A) \not\preceq_1 A$. Maar wat nu als we de verzameling van alle verzamelingen bekijken? Geen verzameling is "groter" dan deze verzameling en toch zou dit moeten volgen uit de stelling van Cantor. Ook Russell's paradox levert ons een tegenspraak. Beschouw immers maar de verzameling $R := \{X \mid X \notin X\}$ en onderzoek vervolgens of $R \in R$. Andere paradoxen zijn bijvoorbeeld de leugenaarsparadox of Berry's paradox. De leugenaarsparadox is de eeuwenoude paradox die ontstaat als men de volgende zin als betekenisvol aanvaart.

   Deze zin is onwaar.

   Berry's paradox beschouwt "het kleinste getal dat niet met minder dan honderd woorden kan worden gedefinieerd". De paradoxen legden een groot probleem aan de dag, namelijk dat de systemen inconsistent waren. Dit is natuurlijk nog ernstiger dan wannneer een systeem slechts onvolledig is als in het eerdere voorbeeld.

3. Sommige systemen gingen uit van axiomas waarvan de filosofische gronden aanvechtbaar zijn, tenminste, volgens haar aanvechters. Als meest bekende voorbeeld noem ik de stroming van het Intuïtionisme die ook wel naar de betere en minder suggestieve naam Constructivisme luistert. Deze stroming is in Nederland ontstaan en haar geestelijk vader is de Nederlandse wiskundige L.E.J. Brouwer. We zullen hier later nog uitvoeriger op terugkomen, hier noemen we alleen dat constructivisme de wet van de uitgesloten derde niet accepteert in haar algemeenheid. De wet van de uitgesloten derde, ookwel "tertium non datur" is weergegeven in het volgende schema:

   $$A \vee \neg A.$$

   Volgens constructivisten weet je $A \vee \neg A$ slechts wanneer je A óf $\neg A$ weet.

Bij dit zogenaamde grondslagen onderzoek zien we dat in zekere zin de filosofie als 'input' voor de wiskunde en/of logica geldt.

Een woord van waarschuwing is op z'n plaats. We gaan in dit college niet alleen maar grootse en wilde theorieën en stellingen bestuderen als bovengenoemde. We achten het ook belangrijk dat aan het eind van het college een aantal technieken is aangeleerd. Sterker nog, hier zal de nadruk op liggen, ook waar het de toesting aangaat.