Opgave 1.6
huiswerk week 5 & 6

door: Bas de Haas

January 7, 2005

1 Het Bewijs

1. Te bewijzen $\forall n\ (p \vdash (\neg\neg)^n p)$ (waarbij $(\neg\neg)^n p$ als volgt gedefinieerd is: $(\neg\neg)^0 p := p$ en $(\neg\neg)^{n+1} p := \neg\neg(\neg\neg)^n p$).

2. Bewijs: met volledige inductie.

3. Basis: Als $n = 0$, dan is $(\neg\neg)^0 p$ per definitie gelijk aan p en p bewijst $p \vdash p$.

4. Inductiestap: We nemen aan dat $(p \vdash (\neg\neg)^n p)$. We willen nu aantonen dat $(p \vdash (\neg\neg)^{n+1} p)$. Onze inductiehypothese geeft ons een bewijs $\overset{\mathcal{D}}{(\neg\neg)^n p}$ waarin verzameling van open aannames in $\mathcal{D}$ bestaat uit $\{p\}$ of uit $\emptyset$. We zijn nu op zoek naar een bewijs $\overset{\mathcal{D}'}{(\neg\neg)^{n+1} p}$.

   Het bewijs $\overset{\mathcal{D}'}{(\neg\neg)^{n+1} p}$ ziet er als volgt uit:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{(\neg\neg)^n p} \quad [\neg(\neg\neg)^n p]_1}{\bot} \to E}{\neg\neg(\neg\neg)^n p} \to I_1$$

   De conclusie, $\neg\neg(\neg\neg)^n p$, is per definitie gelijk aan $(\neg\neg)^{n+1} p$ en $\mathcal{D}'$ bevat geen andere open aannames dan $\mathcal{D}$. Hiermee hebben we bewezen dat $\forall n\ (p \vdash (\neg\neg)^n p)$.

5. Q.E.D.

2 Uitleg

Hierboven ziet u een schoolvoorbeeld van hoe een inductief bewijs er uit zou moeten zien. De stappen 1, 2 en 5 zijn slechts formele stappen die verplicht in uw bewijs moeten staan. Joost Joosten noemt dit graag 'de mantra' en als u ze goed overneemt krijgt u er zelfs een paar punten voor. In de stappen 3 en 4

worden de echte bewijsstappen uitgevoerd.
Stap 3 is de basisstap. Hier gaat u proberen aantonen dat de te bewijzen uitspraak, in ons geval, $(p \vdash (\neg\neg)^n p)$, waar is, wanneer $n = 0$. In praktijk is dit niet anders dan dat u voor n, 0 substitueert en het resultaat uitwerkt. In ons geval moet u ook nog even vermelden, omdat het gaat om bewijsbaarheid, dat p, p bewijst.
Stap 4 is de belangrijkste stap. In de inductiestap probeert u aan te tonen dat uw te bewijzen uitspraak ook waar is voor het geval $n+1$. Dit doet u altijd door uw inductiehypothese aan te nemen. Deze zegt dat de te bewijzen uitspraak waar is voor het geval n.
Omdat we werken met natuurlijke deductie moeten we ook in de gaten houden of er nog sprake is van open aannames. Wanneer dat het geval zou zijn (met uitzondering van $\{p\}$ uiteraard) dan zou het bewijs ongeldig zijn. Dit is niet het geval. Nu we dit alles bewezen hebben, rest ons nog de laatste stap: Q.E.D.