Logica voor Filosofen
WB1BD4052
2004-2005
Uitgewerkte opgaven
Week 3

December 6, 2004

Semantiek

We berekenen hier de waarheidstabel van de formule $(p \vee q) \to (\neg q \to \neg p)$. Bij natuurlijke deductie waren we gewoon om *van buiten naar binnen* te werken. D.w.z., we beschouwden daar eerst het connectief dat helemaal aan de *buitenkant* van de formule zat. Bij waarheidstabellen werken we de andere kant op. We beginnen dus met alle mogelijke (zogeheten) *valuaties* op te schrijven voor de propositievariabelen die in onze formule voorkomen.

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

Nu gaan we steeds kleinere stukjes van onze formule toevoegen.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Nu voegen we nog $\neg p$ toe.

p	q	$p \vee q$	$\neg p$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	1
0	0	0	1

Evenzo berekenen we $\neg q$.

p	q	$p \lor q$	$\neg p$	$\neg q$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	1
0	1	1	1	0
0	0	0	1	1

De kolommen voor $\neg q$ en $\neg p$ worden gebruikt om $\neg q \to \neg p$ te berekenen.

p	q	$p \lor q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \to \neg p$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1

De derde en de zesde kolom worden nu gecombineerd om het eindresultaat te verkrijgen.

p	q	$p \lor q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \to \neg p$	$(p \lor q) \to (\neg q \to \neg p)$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

We zien nu duidelijk dat $(p \lor q) \to (\neg q \to \neg p)$ geen tautologie is. Als namelijk een valuatie v zodanig is dat $v(p) = 1$ en $v(q) = 0$, dan geldt dat $v((p \lor q) \to (\neg q \to \neg p)) = 0$.

Natuurlijke deductie

We laten zien dat $\vdash \psi \lor \psi \to \psi \land \psi$. Dit laten we zien door een bewijs te geven.

$$\dfrac{\dfrac{[\psi \lor \psi]_3 \qquad \dfrac{[\psi]_1 \quad [\psi]_1}{\psi \land \psi}\,\land\mathrm{I} \qquad \dfrac{[\psi]_2 \quad [\psi]_2}{\psi \land \psi}\,\land\mathrm{I}}{\psi \land \psi}\,\lor\mathrm{E}, 1, 2}{\psi \lor \psi \to \psi \land \psi}\,\to\mathrm{I}, 3$$

Toegegeven, een vrij bizar bewijs, maar een bewijs.