Logica voor Filosofen
WB1B(D/A)4052
2004-2005
Oefenversie van het eindtentamen

Docent: Joost J. Joosten

January 20, 2005

1 Semantiek predicatenlogica

Laat zien dat de volgende formules contingenties zijn:

1. $\forall x \exists y\ R(x, y) \rightarrow \forall x \exists y\ R(y, x)$
2. $\forall x \exists y\ R(x, y) \wedge \forall x \exists y\ S(x, y) \rightarrow \forall x \exists y\ (R(x, y) \wedge S(x, y))$
3. $\forall x \exists y\ R(x, y) \wedge \forall x \exists y\ S(x, y) \wedge \exists x \exists y\ (R(x, y) \wedge S(x, y)) \rightarrow \forall x \exists y\ (R(x, y) \wedge S(x, y))$
4. $\forall x \forall y \exists z\ (R(x, z) \wedge R(z, y)) \rightarrow \forall x\ R(x, x) \vee \forall x \forall y\ R(x, y)$

2 Natuurlijke deductie

1. Geef een bewijs met natuurlijke deductie van $(\forall x\ \varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow \exists x\ (\varphi(x) \rightarrow \psi)$. We gebruiken hierbij dat $x \notin \mathsf{FV}(\psi)$.
2. Geef een bewijs met natuurlijke deductie van $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\varphi \vee \psi$
3. Geef een bewijs met natuurlijke deductie van $(\varphi \rightarrow \exists x\ \psi(x)) \rightarrow \exists x\ (\varphi \rightarrow \psi(x))$ We gebruiken hierbij dat $x \notin \mathsf{FV}(\varphi)$.
4. Geef een bewijs met natuurlijke deductie van $\varphi \vee \varphi \rightarrow \varphi \wedge \varphi$.

3 Natuurlijke deductie en volledige inductie

1. Bewijs met behulp van natuurlijke deductie dat $\vdash \neg\forall x\ \varphi(x) \rightarrow \exists x\ \neg\varphi(x)$.

2. Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat

$$\vdash \neg(\exists x\ \neg\varphi_0(x) \vee \ldots \vee \exists x\ \neg\varphi_n(x)) \to \forall x\ (\varphi_0(x) \wedge \ldots \wedge \varphi_n(x))$$

3. Gebruik het resultaat van de vorige opgaven om te bewijzen dat

$$\forall n\ (\vdash \neg\forall x\ (\varphi_0(x) \wedge \ldots \wedge \varphi_n(x)) \to \exists x\ \neg\varphi_0(x) \vee \ldots \vee \exists x\ \neg\varphi_n(x)).$$

4 Deductiestelling

1. Laat m.b.v. valuaties zien dat als $\Gamma, \varphi \models \psi$, dat dan ook $\Gamma \models \varphi \to \psi$.
2. Laat m.b.v. valuaties zien dat als $\Gamma \models \varphi \to \psi$, dat dan ook $\Gamma, \varphi \models \psi$.
3. Laat m.b.v. constructies op bewijzen zien dat als $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, dat dan ook $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.
4. Laat m.b.v. constructies op bewijzen zien dat als $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, dat dan ook $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.

5 Volledige inductie

Bewijs dat[1] $1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

6 Plato en Brouwer

Leg uit waarom Platonisme en Intuïtionisme moeilijk verenigbaar zijn.

[1]Heeft niks met de opgave te maken, maar wel leuk: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$