Logica voor Filosofen
WB1BA4052
2004-2005
Oefenopgaven
Week 5 & 6

Docent: Joost J. Joosten

December 22, 2004

1 Bewijzen met inductie

Bewijs de volgende uitspraken met inductie. Met $\forall n$ bedoedel we "voor elk natuurlijk getal n".

1. $\forall n\ (0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2})$
2. $\forall n\ (\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2})$
3. $\forall n\ (2 + 4 + \ldots + 2 \cdot n = n \cdot (n + 1))$
4. $\forall\, n > 0\ (1 + \ldots + (2 \cdot n - 1) = n^2)$
5. $\forall n\ (p \models (\neg\neg)^n p)$. Hierbij is $(\neg\neg)^n p$ als volgt gedefinieerd: $(\neg\neg)^0 p := p$ en $(\neg\neg)^{n+1} p := \neg\neg(\neg\neg)^n p$.
6. $\forall n\ (p \vdash (\neg\neg)^n p)$

2 Waarheidstafels

Geef de waarheidstafel van $\neg(\neg p_0 \wedge \neg p_1) \to p_0 \vee p_1$.

3 Natuurlijke deductie

1. Geef een bewijs met natuurlijke deductie van $\neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi$.
2. Geef een bewijs met natuurlijke deductie van $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \varphi \vee \psi$

4 Constructies op bewijzen

Laat zien, dat als $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi) \to \psi$, dat dan ook $\vdash \psi$.

5 Natuurlijke deductie en volledige inductie

1. Geef een bewijs met natuurlijke deductie voor de formule $(A_0 \wedge A_1) \to (A_1 \wedge A_0)$.

2. Bewijs dat $\forall n\ \vdash (A_0 \wedge \ldots \wedge A_n) \to (A_n \wedge \ldots \wedge A_0)$. Hier bedoelen we met $\forall n$ de zinsnede "Voor elk natuurlijk getal n". Hint: bezie $(A_0 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A_{n+1})$ als zijnde $((A_0 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge A_{n+1})$. (Precieser gezegd, dat is de *definitie* van $(A_0 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A_{n+1})$.)

6 Meer inductie en deductie

(A) Laat zien dat $\vdash ((A_0 \vee A_1) \wedge \neg A_0) \to A_1$.

(B) Laat met inductie zien dat voor elk natuurlijk getal n het volgende geldt.
$\vdash ((A_0 \vee \ldots A_{n+1}) \wedge \neg A_0 \wedge \ldots \wedge \neg A_n) \to A_{n+1}$
Hint: met $(A_0 \vee \ldots \vee A_{n+1})$ bedoelen we $((A_0 \vee A_n) \vee A_{n+1})$.