Opgave werkkollege dd. 14-12-2004[1]

Opgave 7

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[p]_4$}
\AxiomC{$[p \to (q \vee r)]_1$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$q \vee r$}
\AxiomC{$[q]_5$}
\AxiomC{$[\neg q]_2$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\AxiomC{$[r]_6$}
\RightLabel{$\vee I,l$}
\UnaryInfC{$\neg p \vee r$}
\AxiomC{$[\neg(\neg p \vee r)]_3$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\vee E_{5,6}$}
\TrinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\to I_4$}
\UnaryInfC{$\neg p$}
\RightLabel{$\vee I,l$}
\UnaryInfC{$\neg p \vee r$}
\AxiomC{$[\neg(\neg p \vee r)]_3$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\to RAA$}
\UnaryInfC{$\neg p \vee r$}
\RightLabel{$\to I_2$}
\UnaryInfC{$\neg q \to (\neg p \vee r)$}
\RightLabel{$\to I_1$}
\UnaryInfC{$(p \to (q \vee r)) \to (\neg q \to (\neg p \vee r))$}
\end{prooftree}
$$

Uitleg

Een goede manier om een bewijs te beginnen is door onder aan je blad de conclusie op te schrijven. Het valt direct op dat het hoofdconnectief de implicatie is. Een natuurlijke tweede stap is om, doormiddel van een implicatie introductie, naar boven te werken. We moeten dan wel de formule, $p \to q \vee r$, aan de linkerkant van de pijl aannemen. We schijven deze formule ergens aan de bovenkant van ons vel. Aangezien het volgende hoofdconnectief weer een implicatie is, kunnen we deze stap nog een keer toepassen. We kunnen nu proberen $\neg p \vee r$ af te leiden uit onze aannames, maar door een beetje vooruit te denken, kunnen we inschatten dat dit niet lukt. Dit vraagt om een bewijs uit het ongerijmde. We nemen daarom de negatie van $\neg p \vee r$ aan en gaan proberen om daarmee tot een tegenspraak te komen. We gaan opzoek naar deze tegenspraak door nieuwe formules af te leiden uit de aannames. We zouden kunnen vermoeden dat we de disjunctie uit onze eerste aanname, $p \to q \vee r$, wel eens nodig zouden kunnen hebben. Om deze disjunctie te kunnen gebruiken, moeten wel eerst p aannemen (en we moeten er dus voor zorgen dat deze aanname later weer netjes wordt ingetrokken met een daarvoor bestemde regel). Met de vrijgekomen disjunctie, $q \vee r$, kunnen we verder. Aangezien we $q \to \bot$ hebben, kunnen we met de aanname q zeer makkelijk tot een falsum ($\bot$) komen. En als we r aannemen en een disjunctie introductie doen krijgen we $\neg p \vee r$, wat in tegenspraak is met $(\neg p \vee r) \to \bot$. Ook hier concluderen we dus een $\bot$. Nu kunnen we de disjunctie $q \vee r$ elimineren want we hebben laten zien dat ieder disjunct tot de zelfde conclusie leidt. We mogen dus een falsum concluderen. Nu zou een gedachtegang kunnen zijn: na een falsum mag ik alles concluderen en als we vervolgens $\neg p \vee r$ concluderen, dan zou het bewijs sluitend zijn. Hier maken we echter een vergissing. De aanname p is namelijk nog niet gesloten. Deze kunnen we echter gemakkelijk sluiten door een implicatie introductie te doen. We sluiten daarmee de aanname p en concluderen $p \to \bot$. Nu we $\neg p$ hebben, kunnen we doormiddel van een disjunctie introductie eenvoudig tot de felbegeerde tegenspraak komen en is ons bewijs sluitend.

[1] geLaTeXed door Ulrich

Uiteraard zijn er ook andere manieren om deze stelling te bewijzen en ik kan iedereen aanraden opzoek te gaan naar andere bewijzen. Verder wil ik nogmaals benadrukken dat $\neg p$ en $p \rightarrow \perp$ exact hetzelfde betekenen (maak maar eens een waarheids tabel!) en dat ik het in mijn betoog door elkaar gebruik.