Voortgezette Logica, Week 7

Joost J. Joosten

Universiteit Utrecht

(sub)faculteit der Wijsbegeerte

Heidelberglaan 8

3584 CS Utrecht

Kamer 164, 030-2535575

jjoosten@phil.uu.nl

www.phil.uu.nl/∼jjoosten

Goedel's lecture

- Set theory and the incompletability of mathematics

Goedel's lecture

- Set theory and the incompletability of mathematics
- Een aanpak om de onuitputtelijkheid van de wiskunde aan te tonen.

Goedel's lecture

- Set theory and the incompletability of mathematics
- Een aanpak om de onuitputtelijkheid van de wiskunde aan te tonen.
- De andere aanpak in het paper verloopt via de onvolledigheidsstellingen

Goedel's lecture

- Set theory and the incompletability of mathematics
- Een aanpak om de onuitputtelijkheid van de wiskunde aan te tonen.
- De andere aanpak in het paper verloopt via de onvolledigheidsstellingen
- Een volledig en correct axiomatisch stelsel van de wiskunde en inzien dat het correct is, is onmogelijk

Goedel's lecture

- Set theory and the incompletability of mathematics
- Een aanpak om de onuitputtelijkheid van de wiskunde aan te tonen.
- De andere aanpak in het paper verloopt via de onvolledigheidsstellingen
- Een volledig en correct axiomatisch stelsel van de wiskunde en inzien dat het correct is, is onmogelijk
- Goedel maakt onderscheid tussen wiskunde in de objectieve en in de subjectieve zin van het woord.

Goedel's lecture

- Set theory and the incompletability of mathematics
- Een aanpak om de onuitputtelijkheid van de wiskunde aan te tonen.
- De andere aanpak in het paper verloopt via de onvolledigheidsstellingen
- Een volledig en correct axiomatisch stelsel van de wiskunde en inzien dat het correct is, is onmogelijk
- Goedel maakt onderscheid tussen wiskunde in de objectieve en in de subjectieve zin van het woord.
- Het is duidelijk dat objectieve wiskunde niet door een machine kan worden opgesomd

Goedel's lecture

- Set theory and the incompletability of mathematics
- Een aanpak om de onuitputtelijkheid van de wiskunde aan te tonen.
- De andere aanpak in het paper verloopt via de onvolledigheidsstellingen
- Een volledig en correct axiomatisch stelsel van de wiskunde en inzien dat het correct is, is onmogelijk
- Goedel maakt onderscheid tussen wiskunde in de objectieve en in de subjectieve zin van het woord.
- Het is duidelijk dat objectieve wiskunde niet door een machine kan worden opgesomd
- Hoe zit het met subjectieve wiskunde?

Incompletability

- A priori zou het zo kunnen zijn dat subjectieve wiskunde wel machinaal kan worden opgesomd

Incompletability

- A priori zou het zo kunnen zijn dat subjectieve wiskunde wel machinaal kan worden opgesomd
- Maar dan uiteraard niet de correctheid hiervan ook inzien...

Incompletability

- A priori zou het zo kunnen zijn dat subjectieve wiskunde wel machinaal kan worden opgesomd
- Maar dan uiteraard niet de correctheid hiervan ook inzien...
- In dit geval is het brein/de geest (the mind) equivalent aan een eindige machine

Incompletability

- A priori zou het zo kunnen zijn dat subjectieve wiskunde wel machinaal kan worden opgesomd
- Maar dan uiteraard niet de correctheid hiervan ook inzien...
- In dit geval is het brein/de geest (the mind) equivalent aan een eindige machine
- waarvan de consistentie (bewijsbaar equivalent) kan worden uitgedrukt als $\forall\vec{x}\,\exists\vec{y}\; P(\vec{x},\vec{y}) = 0$

Incompletability

- A priori zou het zo kunnen zijn dat subjectieve wiskunde wel machinaal kan worden opgesomd
- Maar dan uiteraard niet de correctheid hiervan ook inzien...
- In dit geval is het brein/de geest (the mind) equivalent aan een eindige machine
- waarvan de consistentie (bewijsbaar equivalent) kan worden uitgedrukt als $\forall\vec{x}\,\exists\vec{y}\;P(\vec{x},\vec{y}) = 0$
- en die kan dan dus niet gekend worden door the mind

Incompletability

- A priori zou het zo kunnen zijn dat subjectieve wiskunde wel machinaal kan worden opgesomd
- Maar dan uiteraard niet de correctheid hiervan ook inzien...
- In dit geval is het brein/de geest (the mind) equivalent aan een eindige machine
- waarvan de consistentie (bewijsbaar equivalent) kan worden uitgedrukt als $\forall\vec{x}\,\exists\vec{y}\;P(\vec{x},\vec{y})=0$
- en die kan dan dus niet gekend worden door the mind
- Dit levert de disjunctieve stelling van Goedel op

Incompletability

- A priori zou het zo kunnen zijn dat subjectieve wiskunde wel machinaal kan worden opgesomd
- Maar dan uiteraard niet de correctheid hiervan ook inzien...
- In dit geval is het brein/de geest (the mind) equivalent aan een eindige machine
- waarvan de consistentie (bewijsbaar equivalent) kan worden uitgedrukt als $\forall\vec{x}\,\exists\vec{y}\;P(\vec{x},\vec{y})=0$
- en die kan dan dus niet gekend worden door the mind
- Dit levert de disjunctieve stelling van Goedel op
- Of sterker dan een machine, of absoluut onbeslisbare/ onkenbare uitspraken over getallen

Mind versus machine

- Goedel houdt niet van absoluut onbeslisbaar (net als Hilbert)

Mind versus machine

- Goedel houdt niet van absoluut onbeslisbaar (net als Hilbert)
- Kant: "there are sciences the very nature of which requires that every question arising within their domain should be completely answerable in terms of what is known, inasmuch as the answer must issue from the same sources from which the question proceeds"

Mind versus machine

- Goedel houdt niet van absoluut onbeslisbaar (net als Hilbert)
- Kant: "there are sciences the very nature of which requires that every question arising within their domain should be completely answerable in terms of what is known, inasmuch as the answer must issue from the same sources from which the question proceeds"
- Het is dus subtieler dan Lucas, Penrose, Nagel & Newman denken

Mind versus machine

- Goedel houdt niet van absoluut onbeslisbaar (net als Hilbert)
- Kant: "there are sciences the very nature of which requires that every question arising within their domain should be completely answerable in terms of what is known, inasmuch as the answer must issue from the same sources from which the question proceeds"
- Het is dus subtieler dan Lucas, Penrose, Nagel & Newman denken
- Bewijzen vergt consistentie inzien

Realism, or Platonism

- De disjunctieve stelling heeft sterke non-materialistische gevolgen

Realism, or Platonism

- De disjunctieve stelling heeft sterke non-materialistische gevolgen
- Eerste disjunct zegt dat hersenen niet voldoende zijn voor bewustzijn...

Realism, or Platonism

- De disjunctieve stelling heeft sterke non-materialistische gevolgen
- Eerste disjunct zegt dat hersenen niet voldoende zijn voor bewustzijn...
- Tweede disjunct lijkt te weerleggen dat wiskunde slechts mensenwerk is, en lijkt te bevestigen dat een Platonische attitude wegens wiskundige objecten nodig is

Realism, or Platonism

- De disjunctieve stelling heeft sterke non-materialistische gevolgen
- Eerste disjunct zegt dat hersenen niet voldoende zijn voor bewustzijn...
- Tweede disjunct lijkt te weerleggen dat wiskunde slechts mensenwerk is, en lijkt te bevestigen dat een Platonische attitude wegens wiskundige objecten nodig is
- Immers (volgens Goedel):

Realism, or Platonism

- Een schepper moet alle eigenschappen kennen van hetgeen hij geschapen heeft

Realism, or Platonism

- Een schepper moet alle eigenschappen kennen van hetgeen hij geschapen heeft
- (zo niet, wat werkt er dan buiten de schepping om? Wederom Platonisme...)

Realism, or Platonism

- Een schepper moet alle eigenschappen kennen van hetgeen hij geschapen heeft
- (zo niet, wat werkt er dan buiten de schepping om? Wederom Platonisme...)
- Truth is proof wordt ook verworpen

Realism, or Platonism

- Een schepper moet alle eigenschappen kennen van hetgeen hij geschapen heeft
- (zo niet, wat werkt er dan buiten de schepping om? Wederom Platonisme...)
- Truth is proof wordt ook verworpen
- anders kom je in een soort empirisme en probalistiek terecht

Realism, or Platonism

- Een schepper moet alle eigenschappen kennen van hetgeen hij geschapen heeft
- (zo niet, wat werkt er dan buiten de schepping om? Wederom Platonisme...)
- Truth is proof wordt ook verworpen
- anders kom je in een soort empirisme en probalistiek terecht
- Tot slot van deze sectie drie argumenten tegen "constructivisme"

Realism, or Platonism

- Inzicht (meta-mathematica) over onze vermeende creatie heeft geen (of nagenoeg geen) nieuwe wiskundige resultaten opgeleverd

Realism, or Platonism

- Inzicht (meta-mathematica) over onze vermeende creatie heeft geen (of nagenoeg geen) nieuwe wiskundige resultaten opgeleverd
- Stellingen (vooral moeilijke) laten juist zien hoe niet-vrij we zijn

Realism, or Platonism

- Inzicht (meta-mathematica) over onze vermeende creatie heeft geen (of nagenoeg geen) nieuwe wiskundige resultaten opgeleverd
- Stellingen (vooral moeilijke) laten juist zien hoe niet-vrij we zijn
- Overigens, waar is die vrijheid? Indien 2, +, =, en 4 zijn vastgelegd, in hoeverre hebben wij nog keuze om te zeggen dat 2+2=4?

Realism, or Platonism

- Inzicht (meta-mathematica) over onze vermeende creatie heeft geen (of nagenoeg geen) nieuwe wiskundige resultaten opgeleverd
- Stellingen (vooral moeilijke) laten juist zien hoe niet-vrij we zijn
- Overigens, waar is die vrijheid? Indien 2, +, =, en 4 zijn vastgelegd, in hoeverre hebben wij nog keuze om te zeggen dat 2+2=4?
- We hebben nieuwe creaties nodig om eigenschappen van oude creaties in te zien. Ihb verzamelingen van getallen om over getallen te kunnen spreken.

Against conventionalism

- Mathematical conventionalism in meest naïeve vorm is natuurlijk onhoudbaar

Against conventionalism

- Mathematical conventionalism in meest naïeve vorm is natuurlijk onhoudbaar
- "wiskunde is niets dan een op hol geslagen talig proces"

Against conventionalism

- Mathematical conventionalism in meest naïeve vorm is natuurlijk onhoudbaar
- "wiskunde is niets dan een op hol geslagen talig proces"
- Meest naïeve vorm: elk probleem valt na substituties van definities te herleiden tot $a = a$

Against conventionalism

- Mathematical conventionalism in meest naïeve vorm is natuurlijk onhoudbaar
- "wiskunde is niets dan een op hol geslagen talig proces"
- Meest naïeve vorm: elk probleem valt na substituties van definities te herleiden tot $a = a$
- Dit zou een beslissingsprocedure opleveren die er niet is.

Against conventionalism

- Mathematical conventionalism in meest naïeve vorm is natuurlijk onhoudbaar
- "wiskunde is niets dan een op hol geslagen talig proces"
- Meest naïeve vorm: elk probleem valt na substituties van definities te herleiden tot $a = a$
- Dit zou een beslissingsprocedure opleveren die er niet is.
- Ook andere varianten worden door Goedel afgeschoten

Against conventionalism

- Mathematical conventionalism in meest naïeve vorm is natuurlijk onhoudbaar
- "wiskunde is niets dan een op hol geslagen talig proces"
- Meest naïeve vorm: elk probleem valt na substituties van definities te herleiden tot $a = a$
- Dit zou een beslissingsprocedure opleveren die er niet is.
- Ook andere varianten worden door Goedel afgeschoten

- Het syntactisch benodigd reductie-apparaat blijkt nu sterk (en niet slechts syntactisch te zijn)

Against conventionalism

- Mathematical conventionalism in meest naïeve vorm is natuurlijk onhoudbaar
- "wiskunde is niets dan een op hol geslagen talig proces"
- Meest naïeve vorm: elk probleem valt na substituties van definities te herleiden tot $a = a$
- Dit zou een beslissingsprocedure opleveren die er niet is.
- Ook andere varianten worden door Goedel afgeschoten

- Het syntactisch benodigd reductie-apparaat blijkt nu sterk (en niet slechts syntactisch te zijn)
- Bovendien, een reductie levert meestal een consistentiebewijs!

Realism and analiticity

- Goedel moet Nominalisten iets nageven

Realism and analiticity

- Goedel moet Nominalisten iets nageven
- (Nominalisme: concepten bestaan alleen in ons hoofd)

Realism and analiticity

- Goedel moet Nominalisten iets nageven
- (Nominalisme: concepten bestaan alleen in ons hoofd)
- wiskundige stellingen hebben geen direct gevolgen voor de werkelijke ruimte-tijd omdat de waarheid van wiskunde reeds door de concepten wordt bepaald

Realism and analiticity

- Goedel moet Nominalisten iets nageven
- (Nominalisme: concepten bestaan alleen in ons hoofd)
- wiskundige stellingen hebben geen direct gevolgen voor de werkelijke ruimte-tijd omdat de waarheid van wiskunde reeds door de concepten wordt bepaald
- Goedel gelooft in *analytische* kennis

Realism and analiticity

- Goedel moet Nominalisten iets nageven
- (Nominalisme: concepten bestaan alleen in ons hoofd)
- wiskundige stellingen hebben geen direct gevolgen voor de werkelijke ruimte-tijd omdat de waarheid van wiskunde reeds door de concepten wordt bepaald
- Goedel gelooft in *analytische* kennis
- those true in virtue of the meanings of the terms expressing them or "owing to the nature of the concepts occuring therein"

Realism and analiticity

- Goedel moet Nominalisten iets nageven
- (Nominalisme: concepten bestaan alleen in ons hoofd)
- wiskundige stellingen hebben geen direct gevolgen voor de werkelijke ruimte-tijd omdat de waarheid van wiskunde reeds door de concepten wordt bepaald
- Goedel gelooft in *analytische* kennis
- those true in virtue of the meanings of the terms expressing them or "owing to the nature of the concepts occuring therein"
- en stelt dit tegenover *tautologische* kennis

Realism and analiticity

- Goedel moet Nominalisten iets nageven
- (Nominalisme: concepten bestaan alleen in ons hoofd)
- wiskundige stellingen hebben geen direct gevolgen voor de werkelijke ruimte-tijd omdat de waarheid van wiskunde reeds door de concepten wordt bepaald
- Goedel gelooft in *analytische* kennis
- those true in virtue of the meanings of the terms expressing them or "owing to the nature of the concepts occuring therein"
- en stelt dit tegenover *tautologische* kennis
- those "devoid of content" or "true owing to our definitions"

Conclusions

- Nominalisme ontkracht

Conclusions

- Nominalisme ontkracht
- Pleidooi voor realisme

Conclusions

- Nominalisme ontkracht
- Pleidooi voor realisme
- Valt in principe met wiskundige precisie te bewijzen...

Mogelijke vraagstellingen

- Is de notie van verzameling essentieel belangrijk voor ons denken in het algemeen en voor het bedrijven van de wiskunde in het bijzonder?

Mogelijke vraagstellingen

- Is de notie van verzameling essentieel belangrijk voor ons denken in het algemeen en voor het bedrijven van de wiskunde in het bijzonder?
- Is het mogelijk filosofische debatten handelend over kwesties als bv ontologie van concepten, met mathematische precisie te voeren?

Mogelijke vraagstellingen

- Is de notie van verzameling essentieel belangrijk voor ons denken in het algemeen en voor het bedrijven van de wiskunde in het bijzonder?
- Is het mogelijk filosofische debatten handelend over kwesties als bv ontologie van concepten, met mathematische precisie te voeren?
- Laten Goedels stellingen en het mogelijk bestaan van absoluut onbeslisbare proposities niet zien dat het verstandig is om het klassiek waarheidsbegrip los te laten?

Mogelijke vraagstellingen

- Is het brein met een eindig aantal neuronen noodzakelijk te bezien als een eindige machine?

Mogelijke vraagstellingen

- Is het brein met een eindig aantal neuronen noodzakelijk te bezien als een eindige machine?
- Hoe maken de onvolledigheidsstellingen het onaannemelijk dat wiskunde slechts onze creatie is?

Mogelijke vraagstellingen

- Is het brein met een eindig aantal neuronen noodzakelijk te bezien als een eindige machine?
- Hoe maken de onvolledigheidsstellingen het onaannemelijk dat wiskunde slechts onze creatie is?
- Hoe zou object-realisme zich onderscheiden van conceptrealisme?

Mogelijke vraagstellingen

- Is het brein met een eindig aantal neuronen noodzakelijk te bezien als een eindige machine?
- Hoe maken de onvolledigheidsstellingen het onaannemelijk dat wiskunde slechts onze creatie is?
- Hoe zou object-realisme zich onderscheiden van conceptrealisme?
- Bedenk zelf iets leuks (mag ook minder filosofisch en meer technisch)

Modale logica, afleidingen

- We zullen later een link van modale logica naar Gödel 2 zien!

Modale logica, afleidingen

- We zullen later een link van modale logica naar Gödel 2 zien!
- Bewijzen in ND kunnen nogal uit de hand lopen

Modale logica, afleidingen

- We zullen later een link van modale logica naar Gödel 2 zien!
- Bewijzen in ND kunnen nogal uit de hand lopen
- In de reader worden (formeel) informele bewijzen beschouwd.

Modale logica, afleidingen

- We zullen later een link van modale logica naar Gödel 2 zien!
- Bewijzen in ND kunnen nogal uit de hand lopen
- In de reader worden (formeel) informele bewijzen beschouwd.
- Bv (zie reader) $\Box(A \wedge B) \to \Box B$

Modale logica, afleidingen

- We zullen later een link van modale logica naar Gödel 2 zien!
- Bewijzen in ND kunnen nogal uit de hand lopen
- In de reader worden (formeel) informele bewijzen beschouwd.
- Bv (zie reader) $\Box(A \wedge B) \to \Box B$
- Geen propositioneel gezever

(Formeel) Informele afleidingen

- In de reader: noemen wel:

(Formeel) Informele afleidingen

- In de reader: noemen wel:
- Nec

(Formeel) Informele afleidingen

- In de reader: noemen wel:
- Nec
- axiomas modale systemen

(Formeel) Informele afleidingen

- In de reader: noemen wel:
- Nec
- axiomas modale systemen
- Definitie $\Diamond$

(Formeel) Informele afleidingen

- In de reader: noemen wel:
- Nec
- axiomas modale systemen
- Definitie $\Diamond$
- Substitueren van equivalenten

(Formeel) Informele afleidingen

- In de reader: noemen wel:
- Nec
- axiomas modale systemen
- Definitie $\Diamond$
- Substitueren van equivalenten
- Hypothesen, en afhankelijkheid van hypothesen

Substitutie

- Bij substitutieregel wordt gezegd welke substitutie er is gedaan

Substitutie

- Bij substitutieregel wordt gezegd welke substitutie er is gedaan
- Voorbeeld: $\neg\Diamond\Diamond\neg A \leftrightarrow \Box\Box A$

Substitutie

- Bij substitutieregel wordt gezegd welke substitutie er is gedaan
- Voorbeeld: $\neg\Diamond\Diamond\neg A \leftrightarrow \Box\Box A$
- Beginnend met $\Box\Box A \leftrightarrow \Box\Box A$

Dualiteiten

- $\Diamond$ mogen we vervangen door $\neg\Box\neg$

Dualiteiten

- $\Diamond$ mogen(moeten) we vervangen door $\neg\Box\neg$

Dualiteiten

- $\Diamond$ mogen(moeten) we vervangen door $\neg\Box\neg$
- We gaan ook direct $\Box\neg$, $\neg\Box$, etc direct vervangen

Dualiteiten

- $\Diamond$ mogen(moeten) we vervangen door $\neg\Box\neg$
- We gaan ook direct $\Box\neg$, $\neg\Box$, etc direct vervangen
- Voorbeeld: $\neg\Diamond\Box\varphi \vdash \Box\Diamond\neg\varphi$

Dualiteiten

- $\Diamond$ mogen(moeten) we vervangen door $\neg\Box\neg$
- We gaan ook direct $\Box\neg$, $\neg\Box$, etc direct vervangen
- Voorbeeld: $\neg\Diamond\Box\varphi \vdash \Box\Diamond\neg\varphi$
- Aannames worden onderstreept

Dualiteiten

- $\Diamond$ mogen(moeten) we vervangen door $\neg\Box\neg$
- We gaan ook direct $\Box\neg$, $\neg\Box$, etc direct vervangen
- Voorbeeld: $\neg\Diamond\Box\varphi \vdash \Box\Diamond\neg\varphi$
- Aannames worden onderstreept
- en ook regels die van aannames afhangen

De gulden middenweg?

- Voorbeeld: $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A \wedge \Box B$

De gulden middenweg?

- Voorbeeld: $\Box(A \wedge B) \to \Box A \wedge \Box B$
- We nemen, Nec en $Distr$ vaak samen

De gulden middenweg?

- Voorbeeld: $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A \wedge \Box B$
- We nemen, Nec en $Distr$ vaak samen
- Voorbeeld: $\Diamond A \wedge \Box(A \rightarrow \Box A) \rightarrow \Diamond\Box A$

De gulden middenweg?

- Voorbeeld: $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A \wedge \Box B$
- We nemen, Nec en $Distr$ vaak samen
- Voorbeeld: $\Diamond A \wedge \Box(A \rightarrow \Box A) \rightarrow \Diamond\Box A$
- Wat een ellende...

Volwassen aanpak, echt informeel

- Voorbeeld: $\Diamond A \wedge \Box(A \rightarrow \Box A) \rightarrow \Diamond\Box A$

Volwassen aanpak, echt informeel

- Voorbeeld: $\Diamond A \wedge \Box(A \to \Box A) \to \Diamond\Box A$
- Heeft de structuur van natuurlijke deductie met gebruik van veel lemmata

Volwassen aanpak, echt informeel

- Voorbeeld: $\Diamond A \wedge \Box(A \to \Box A) \to \Diamond\Box A$
- Heeft de structuur van natuurlijke deductie met gebruik van veel lemmata
- We noemen de zogeheten *informele afleidingen* uit de reader van nu af aan *formeel informele afleidingen* en onze eigen free-style duiden we van nu af aan aan met *informele afleidingen*

Volwassen aanpak, echt informeel

- Voorbeeld: $\Diamond A \wedge \Box(A \to \Box A) \to \Diamond\Box A$
- Heeft de structuur van natuurlijke deductie met gebruik van veel lemmata
- We noemen de zogeheten *informele afleidingen* uit de reader van nu af aan *formeel informele afleidingen* en onze eigen free-style duiden we van nu af aan aan met *informele afleidingen*
- Dit is onze standaard!

Uitbreidingen van K

- D

Uitbreidingen van K

- D
- T

Uitbreidingen van K

- D
- T
- B

Uitbreidingen van K

- D
- T
- B
- 4

Uitbreidingen van K

- D
- T
- B
- 4
- 5

Uitbreidingen van K

- D
- T
- B
- 4
- 5
- Systematische naam

Uitbreidingen van K

- D
- T
- B
- 4
- 5
- Systematische naam
- Traditionele naam