Ejercicios 01

Eduardo Hermo Reyes
ehermo.reyes@ub.edu

22 de octubre de 2020

Ejercicio 1. Usando las tablas de verdad, diga si la siguiente fórmula

$$\neg\,(p \wedge q) \to \Big((\neg\, q \vee p) \vee (\neg\, p \vee \neg\, q)\Big)$$

es una tautología, una contradicción o una fórmula contingente.

Solución 1.

p	q	$p \wedge q$	$\neg\,(p \wedge q)$	$\neg\, p$	$\neg\, q$	$\neg\, p \vee \neg\, q$	$\neg\, q \vee p$	$(\neg\, q \vee p) \vee (\neg\, p \vee \neg\, q)$
V	V	V	F	F	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

p	q	$\neg\,(p \wedge q) \to \Big((\neg\, q \vee p) \vee (\neg\, p \vee \neg\, q)\Big)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

La fórmula es una **tautología**. Es más, podemos observar que la subfórmula

$$(\neg\, q \vee p) \vee (\neg\, p \vee \neg\, q)$$

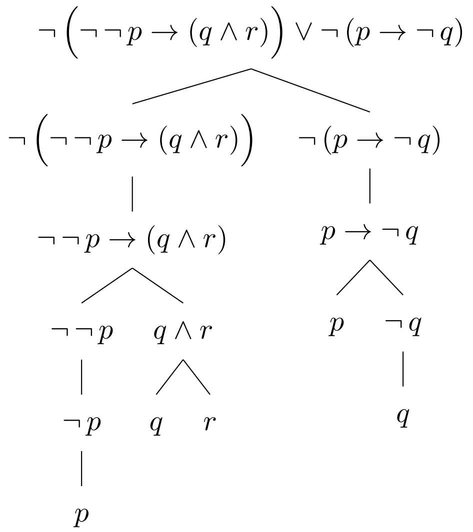
es también una tautología. Las restantes subfórmulas son todas contingentes.

Ejercicio 2. Construya el árbol genealógico de las siguientes fórmulas:

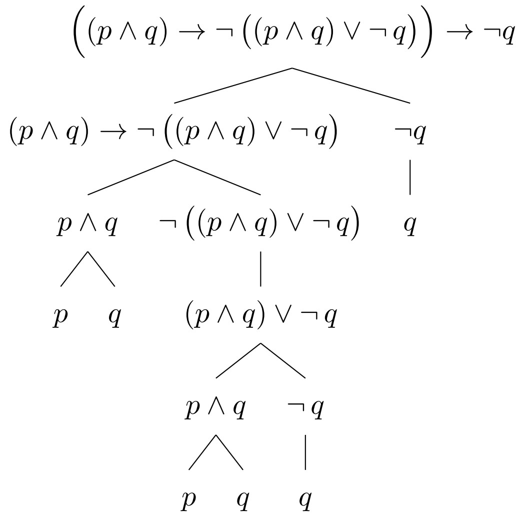
1. $\neg\Big(\neg\,\neg\, p \to (q \wedge r)\Big) \vee \neg\,(p \to \neg\, q)$;
2. $\Big((p \wedge q) \to \neg\,\big((p \wedge q) \vee \neg\, q\big)\Big) \to \neg q$.

Solución 2.

1.



2.



Ejercicio 3. Diga si la siguiente fórmula es una tautología, una contradicción o una fórmula contingente:

$$\neg\Big(\big((p \vee q) \wedge (r \wedge \neg s)\big) \vee \neg(t \to u)\Big) \to \neg(w \wedge \neg w).$$

Solución 3. Observemos que $w \wedge \neg w$ es una contradicción, por lo que $\neg(w \wedge \neg w)$ es una tautología. Observemos además que si α es una tautología, para cualquier fórmula β tenemos que $\beta \to \alpha$ es una tautología. Por lo tanto, para cualquier fórmula β tenemos que

$$\beta \to \neg(w \wedge \neg w)$$

es una tautología. Así pues, podemos concluir que

$$\neg\Big(\big((p \vee q) \wedge (r \wedge \neg s)\big) \vee \neg(t \to u)\Big) \to \neg(w \wedge \neg w).$$

es una tautología.

Ejercicio 4. Sean α, β y δ fórmulas tales que

$$\alpha \equiv \beta \text{ y } \beta \equiv \delta$$

¿Es cierto que $\alpha \equiv \delta$?

Solución 4. Supongamos que $\alpha \equiv \beta$ y $\beta \equiv \delta$. Tomemos una asignación cualquiera v. Entonces tenemos que $v(\alpha) = v(\beta)$ ya que $\alpha \equiv \beta$. Además, $v(\beta) = v(\delta)$ puesto que $\beta \equiv \delta$. Por lo tanto, para cualquier asignación v tenemos que $v(\alpha) = v(\delta)$. Es decir, $\alpha \equiv \delta$.

Ejercicio 5. Diga si las siguientes equivalencias lógicas son ciertas o no:

1. $p \to \neg p \equiv \neg p \to p$;
2. $p \to q \equiv \neg p \to \neg q$;
3. $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$;
4. $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg (p \vee q)$;
5. $p \to q \equiv \neg p \vee q$;
6. $p \to (p \vee q) \equiv \neg p \vee p$.

Solución 5.

1. **Falso:**

p	$\neg p$	$p \to \neg p$	$\neg p \to p$
V	F	F	V
F	V	V	F

   Cualquier asignación de p muestra que no son equivalentes.

2. **Falso:**

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p \to \neg q$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V

   Las asignaciones:

   - $v(p) = V$ y $v(q) = F$;
   - $v(p) = F$ y $v(q) = V$;

   muestran que no son equivalentes.

3. **Verdadero.**

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

   Para toda asignación ambas fórmulas toman el mismo valor de verdad.

4. **Verdadero.**

5. **Verdadero.**

6. **Verdadero.**

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$	$p \vee \neg p$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V

Podemos comprobar que ambas fórmulas son tautologías, por lo que para toda asignación toman el mismo valor de verdad.