Introducción

Eduardo Hermo Reyes
ehermo.reyes@ub.edu

December 14, 2020

1 Teoría de conjuntos

1.1 ¿Qué es un conjunto?

- Una colección de objetos a los que llamamos elementos;
- Todo posible objeto puede ser un elemento; incluso otros conjuntos;

Si A es un conjunto y x es un objeto, usamos las expresiones

$$x \in A$$

para decir que x es un elemto de A (o x pertenece a A)

$$x \notin A$$

para decir que x no es un elemento de A (o x no pertenece a A)

1.2 Principio de extensionalidad

- Un conjunto está determinado por sus elementos, es decir:

$$A = B \text{ sii } A \text{ y } B \text{ tienen los mismos elementos}$$

Lo que importa de un conjunto **NO** es cómo lo definimos sino los elementos que contiene.

EJEMPLO

$A :=$ el conjunto de todos los números naturales mayores que 0;

$B :=$ el conjunto de todos los números naturales mayores o iguales que 1;

- La definición de estos conjuntos es distinta;
- Sin embargo, $A = B$

1.3 Cómo nos referimos a los conjuntos?

1. Comprensión
2. Enumeración

1.3.1 Comprensión

Denotamos un conjunto dando una propiedad que poseen todos los elementos del conjunto y solo ellos.

$$\{x : x \text{ es mayor que } 0\}$$

o

$$\{x : x \text{ es el nombre de un planeta del Sistema solar}\}$$

Sea ϕ una propiedad:

$$\{x : x \text{ posee la propiedad } \phi\}$$

o

$$\{x : \phi(x)\}$$

Podemos reformular el *principio de extensionalidad*.

Sea $A := \{x : \phi(x)\}$ y $B := \{x : \psi(x)\}$:

$$A = B \text{ sii para todo elemento } x, \phi(x) \text{ sii } \psi(x)$$

1.3.2 Enumeración

Denotamos un conjunto por enumeración cuando nombramos todos sus elementos.

- Complicado cuando el conjunto es grande;
- Imposible si es infinito

Ejemplos

$\{1, 2, 3, 4\}$, $\{a, b, c\}$, etc

1.3.3 IMPORTANTE:

Por el *principio de extensionalidad* tenemos que:

- Cuando damos un conjunto por enumeración no nos importa el orden!

$$\{0, 1, 2\} = \{1, 2, 0\}$$

- No tendremos en cuenta las posibles repeticiones de los elementos en el conjunto

$$\{0, 1, 2\} = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 2\}$$

1.4 La relación de inclusión ($\subseteq$)

La utilizamos para expresar que un conjunto A está incluido en otro conjunto B o que A es un subconjunto de B

$$A \subseteq B \text{ sii, para todo elemento } x, \text{ si } x \in A \text{ entonces, } x \in B$$

También podemos expresar la negación de esta relación:

$$A \nsubseteq B \text{ sii, existe al menos un elemento } x, \text{ tal que } x \in A \text{ y } x \notin B$$

Sean A, B y C conjuntos: 1. $A \subseteq A$; 2. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$; 3. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.

Para todo elemento x:

$$x \in A \text{ sii } \{x\} \subseteq A$$

¿Por qué? Supongamos que $x \in A$. Ahora queremos ver que $\{x\} \subseteq A$. Comprobar esto es lo mismo que comprobar que todos los elementos del conjunto $\{x\}$ pertenecen también a A. En este caso concreto, puesto que $\{x\}$ tiene un solo elemento, x, deberíamos comprobar que $x \in A$. Pero esto es exactamente nuestra suposición de inicio. Por otro lado, supongamos que $\{x\} \subseteq A$. Aplicando la definición de subconjunto vemos que todos los elementos de $\{x\}$ pertenecen también a A. Claramente vemos que x es un elemento de $\{x\}$, por lo que si $\{x\} \subseteq A$, tenemos que x tiene que ser también un elemento de A, es decir, $x \in A$.

1.5 El conjunto vacío

- Existen conjuntos que no tienen elementos.
- Por el principio de extensionalidad, todos esos conjuntos sin elementos son en realidad el mismo.
- Al conjunto sin elementos lo llamamos *el conjunto vacío* ($\emptyset$).

$$\emptyset = \{x : x \neq x\}.$$

- Para todo conjunto A, tenemos que

$$\emptyset \subseteq A.$$

Para confirmar esto, podemos usar las definiciones que hemos visto en el apartado anterior. Supongamos que no nos lo creemos, es decir, $\emptyset \nsubseteq A$. Aplicando la definición de **no ser subconjunto**, tendríamos que debería existir un elemento x tal que, $x \in \emptyset$ y $x \notin A$. Ahora bien, esto es imposible ya que tratándose del conjunto vacío, nunca se cumplirá la condición $x \in \emptyset$ para ningún elemento x. Por lo que, en otras palabras, **no puede ser** que $\emptyset \nsubseteq A$, o lo que es lo mismo, **no puede ser** que **no** sea un subconjunto. Es decir, $\emptyset \subseteq A$.

PREGUNTA

$$\emptyset \stackrel{?}{=} \{\emptyset\}$$

RESPUESTA

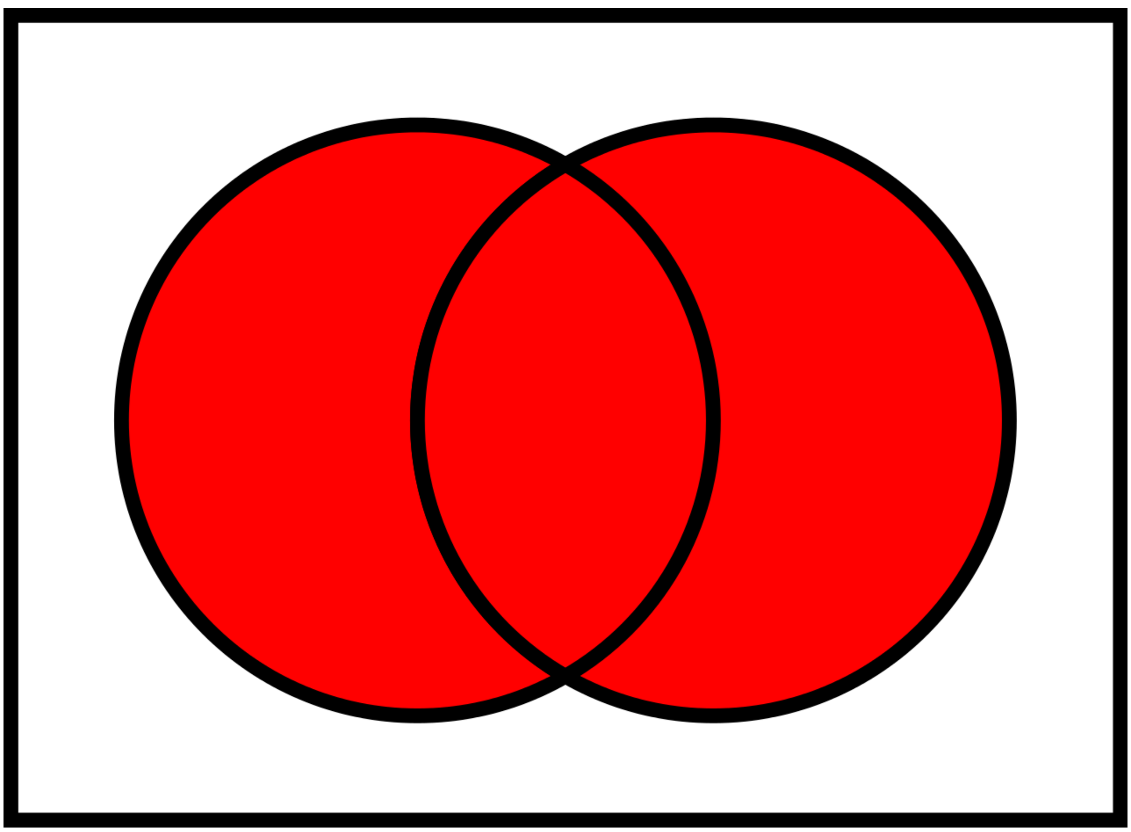
Falso. Tenemos que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. La forma más sencilla de verlo es observar que $\emptyset$ no tiene ningún elemento, mientras que $\{\emptyset\}$ contiene un único elemento; a saber, $\emptyset$. Por lo tanto, por el principio de extensionalidad, sabemos que son conjuntos distintos.

1.6 Unión e intersección

- Operaciones básicas entre conjuntos
- Dados dos conjuntos o más, podemos combinar sus elementos y obtener nuevos conjuntos a partir de estas operaciones

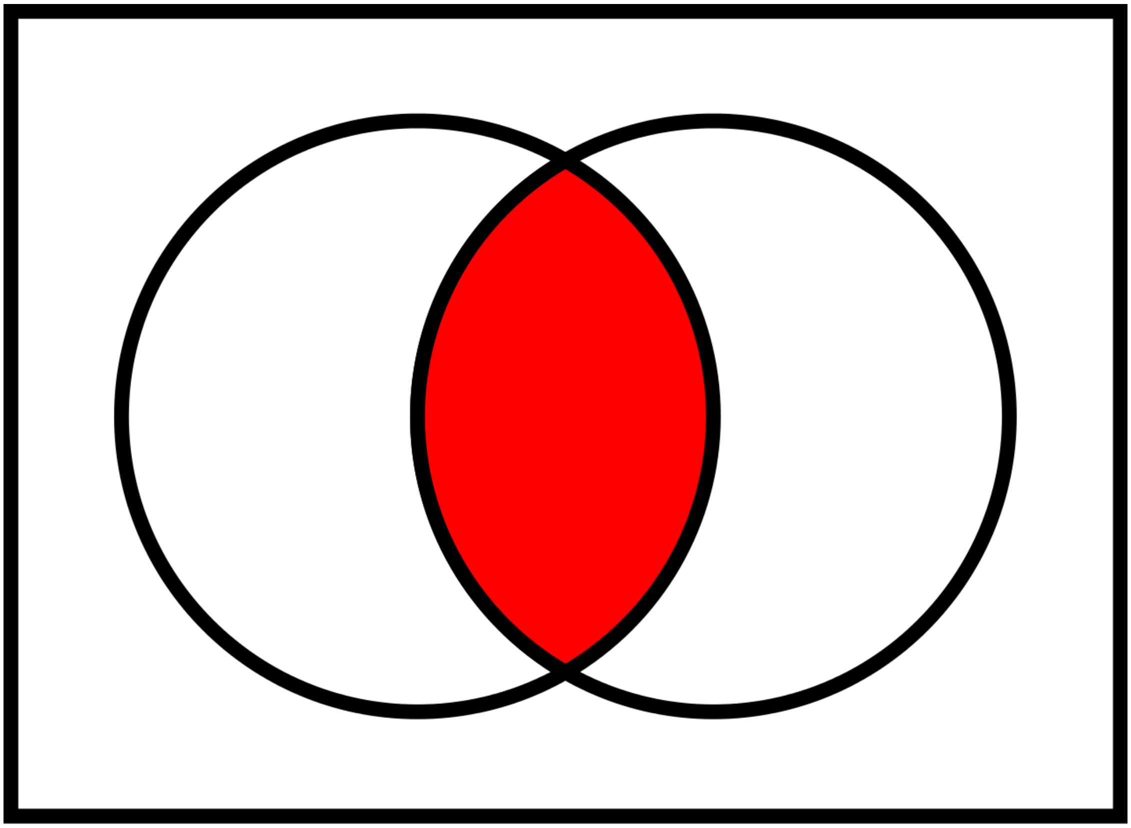
Unión ($\cup$) El conjunto de los elementos que pertenecen a A junto con los elementos de B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$



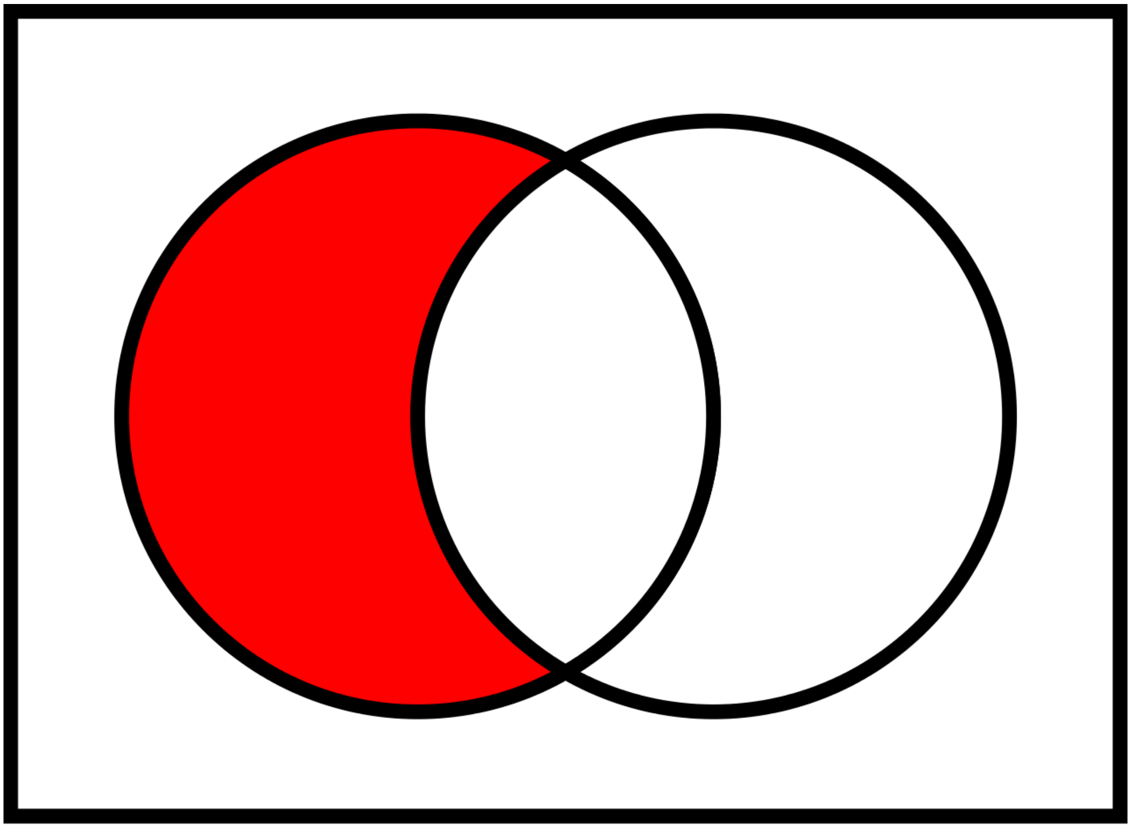
Intersección ($\cap$) El conjunto de los elementos que pertenecen tanto a A como a B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$$



Diferencia ($-$) El conjunto de los elementos que pertenecen a A pero no a B.

$$A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$$



Ejemplos

Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ y $C = \emptyset$:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A \cap B = \{3\}$
- $A \cup C = A$
- $A \cap C = C$
- $A \cup (B \cap C) = A$

1.6.1 Algunas propiedades

Unión

- $A \cup B = B \cup A$;
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
- $A \cup \emptyset = A$;
- $A \cup A = A$.

Intersección

- $A \cap B = B \cap A$;
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

- $A \cap \emptyset = \emptyset$;
- $A \cap A = A$.

Diferencia

- $A - \emptyset = A$;
- $\emptyset - A = \emptyset$;
- $A - A = \emptyset$.

Entre operaciones

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;
- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

1.6.2 Principio de separación

Principio de separación: Si A es un conjunto y ϕ una propiedad, entonces hay un conjunto cuyos elementos son exactamente los elementos de A que tienen la propiedad B.

Es decir, tenemos un conjunto A. Aplicando este principio, ahora podemos obtener un nuevo conjunto B compuesto por aquellos elementos que se encuentran en A y que además, cumplen la propiedad ϕ. Es decir,

$$B = \{x \in A : \phi(x)\}.$$

Esto es lo mismo que decir,

$$B = \{x : x \in A \text{ y } \phi(x)\}.$$

1.7 Pares ordenados y relaciones

- Podemos usar los conjuntos para hablar de propiedades de los elementos pero también nos interesa expresar que ciertos elementos A están en determinada **relación**.
- Para hablar de relaciones, lo primero que podemos observar es que éstas tienen algo así como una dirección; las relaciones se dan entre pares de objetos en cierto orden.
- Usando conjuntos, sabemos que por ejemplo $\{a, b\} = \{b, a\}$ por lo que necesitamos algo más para expresar el orden de los elementos.

1.7.1 Par ordenado

- Dados un par de objetos a y b, con $\langle a, b \rangle$ denotamos el *par odenado de a y b*. Su *primer componente* será a y su *segunda componente* será b.
- El único requisito que exigimos a los pares ordenados es el siguiente. Sean a, b, c y d elementos:

$$(**) \qquad\qquad \text{Si } \langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \text{ entonces } a = c \text{ y } b = d.$$

- **Podremos definir una relación como un conjunto de pares ordenados**

1.7.2 ¿Cómo definimos los pares ordenados en términos de conjuntos?

Existen múltiples definiciones válidas. La que usaremos nosotros será la siguiente:

$$\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

Está definición satisface el principio $(**)$ que exigimos a los pares ordenados.

Ejemplo: Tomemos el siguiuente conjunto $A = {1,2,3,4} $. Podemos definir la relación R en A como un conjunto de pares ordenados cuyas componentes son ambas elementos de A. Es decir, $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle\}$.

Preguta: Existen otras relaciones que podemos definir en A ¿Podrías definir la relación S que satisfaga $\forall x\ Sxx$?

1.8 Producto cartesiano (×)

$A \times B$ designa el conjunto de todos los pares ordenados cuya primer componente es un elemento de A y la segunda componente es un elemento de B.

Ejemplo: Sea $A = \{1,2\}$ y $B = \{3,4\}$. El producto cartesiano $A \times B = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle\}$.

Formalmente las relaciones se definen haciendo uso del producto cartesiano; son un subconjunto de éstas. Por ejemplo, sea $A = \{\text{Tolstói, Dostoyevski}\}$ y $B = \{\text{Guerra y paz, Ana Karenina, Crimen y castigo, Los demonios}\}$. Tendríamos entonces que

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & \langle \text{Tolstói, Guerra y Paz}\rangle, \langle \text{Tolstói, Ana Karenina}\rangle, \langle \text{Tolstói, Crimen y castigo}\rangle, \\ & \langle \text{Tolstói, Los demonios}\rangle, \langle \text{Dostoyevski, Guerra y Paz}\rangle, \langle \text{Dostoyevski, Ana Karenina}\rangle, \\ & \langle \text{Dostoyevski, Crimen y castigo}\rangle, \langle \text{Dostoyevski, Los demonios}\rangle\} \end{aligned}$$

Ahora podemos definir la relación R *ser autor de*. Podemos ver que R es un conjunto de pares ordenados, cuyas primeras componentes son elementos de A y sus segundas componentes son elementos de B. Por lo tanto, $R \subseteq A \times B$. No obstante, sabemos por ejemplo que Dostoyevski no es el autor de Ana Karenina. Por lo que $R \neq A \times B$. Será pues un subconjunto propio. Con todo esto, podemos dar R de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} R = \{ & \langle \text{Tolstói, Guerra y Paz}\rangle, \langle \text{Tolstói, Ana Karenina}\rangle, \\ & \langle \text{Dostoyevski, Crimen y castigo}\rangle, \langle \text{Dostoyevski, Los demonios}\rangle\} \end{aligned}$$

1.9 Ejercicios

Escribe un par ordenado tal que:

1. Su primera componente es 1 y su segunda componente es 0;
2. Su segunda componente es a y su primera componente es 3;
3. Su primera y su segunda componente son ambas 0.

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Define una relación R en A tal que:

1. Para todo $x \in A$, x está relacionado consigo mismo;
2. Para cualesquiera $x, y \in A$, si x está relacionado con y, entonces y está relacionado con x;
3. Para cualesquiera $x, y, z \in A$, si x está relacionado con y e y está relacionado con z, entonces x está relacionado con z;

1.10 Respuestas

Escribe un par ordenado tal que:

1. $\langle 1, 0 \rangle$;
2. $\langle 3, \mathrm{a} \rangle$;
3. $\langle 0, 0 \rangle$.

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Define una relación R en A tal que:

1. $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$;
2. $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$;
3. $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$;

Atención: Las respuestas al segundo ejercicio no son las únicas válidas!!

2 Semántica para lógica de primer orden

2.1 Lenguajes de primer orden

2.1.1 Símbolos lógicos y auxiliares:

- Variables: $x, y, z \ldots$
- Conectivas: $\wedge, \rightarrow, \wedge, \neg$
- Cuantificadores: $\forall, \exists$
- Paréntesis

2.1.2 Símbolos propios:

- Constantes individuales: $c, d, \ldots$
- Símbolos de predicado: $P, Q, \ldots$
- Símbolos relacionales: $R, S, \ldots$

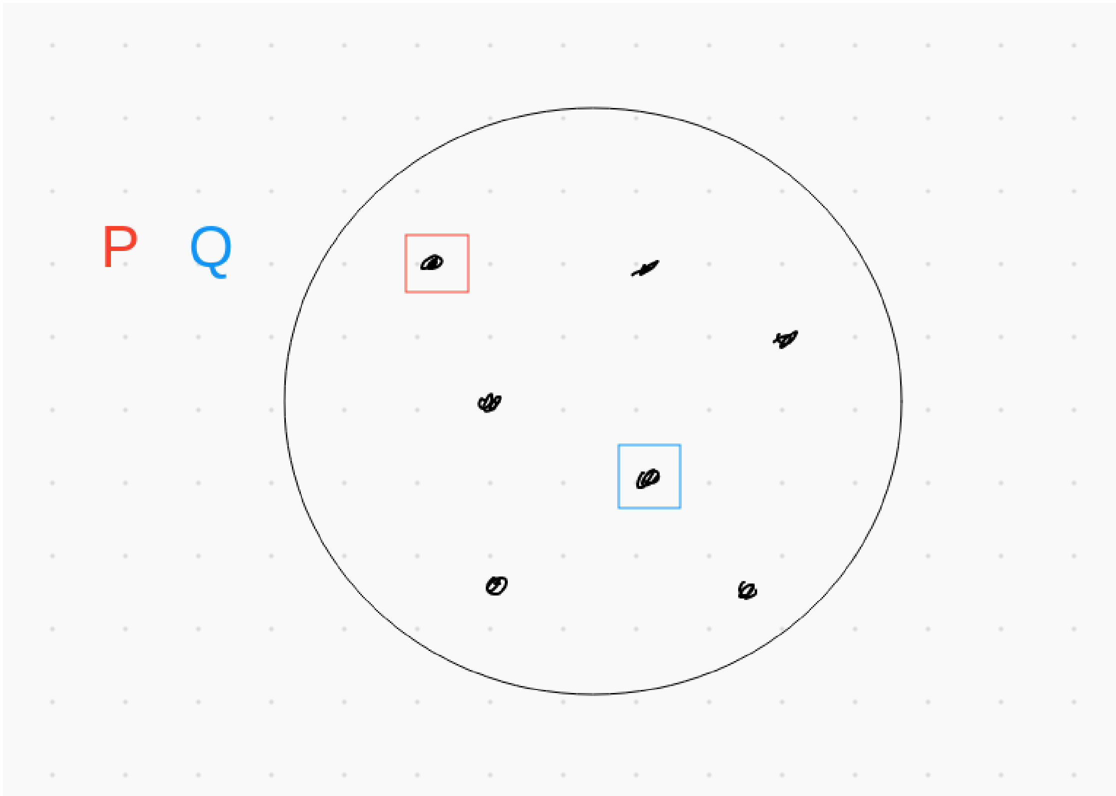
Para la semántica de la lógica de primer orden, vamos a interpretar los **símbolos propios** de nuestro lenguaje.

El universo de un modelo nunca es vacío.

Todo símbolo del lenguaje ha de estar interpretado en nuestro modelo.

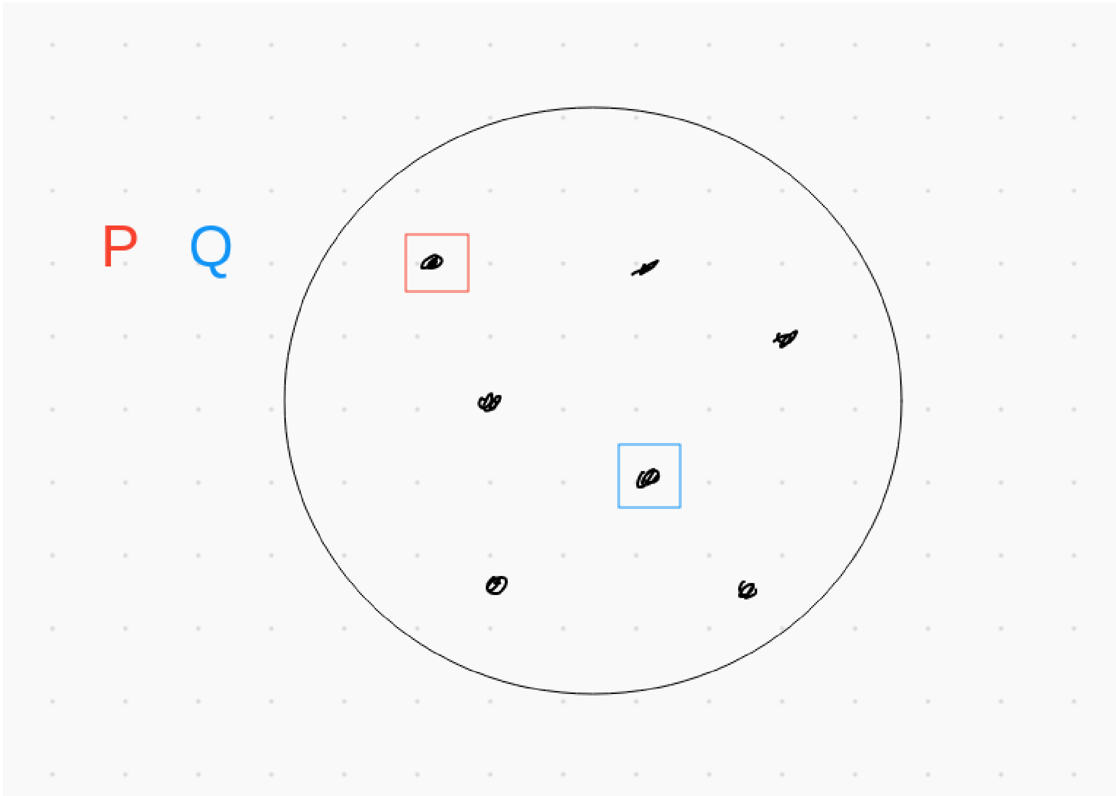
1. $\exists x Px \wedge \exists x \neg Qx$

En este primer caso observamos que la conectiva principal de la sentencia es la conjunción ($\wedge$). Las cuantificaciones existenciales afectan cada una a una de la partes de la conjunción. De aquí podemos inferir que el/los individuos que tiene/n la propiedad P no tienen que ser los mismos que que no tienen la propiedad Q, aunque tampoco tienen por qué ser distintos. El hecho de que en ambas partes de la conjunción aparezca la misma variable no debe hacernos pensar que se trata de los mismos individuos.



2. $\exists x(Px \wedge \neg Qx)$

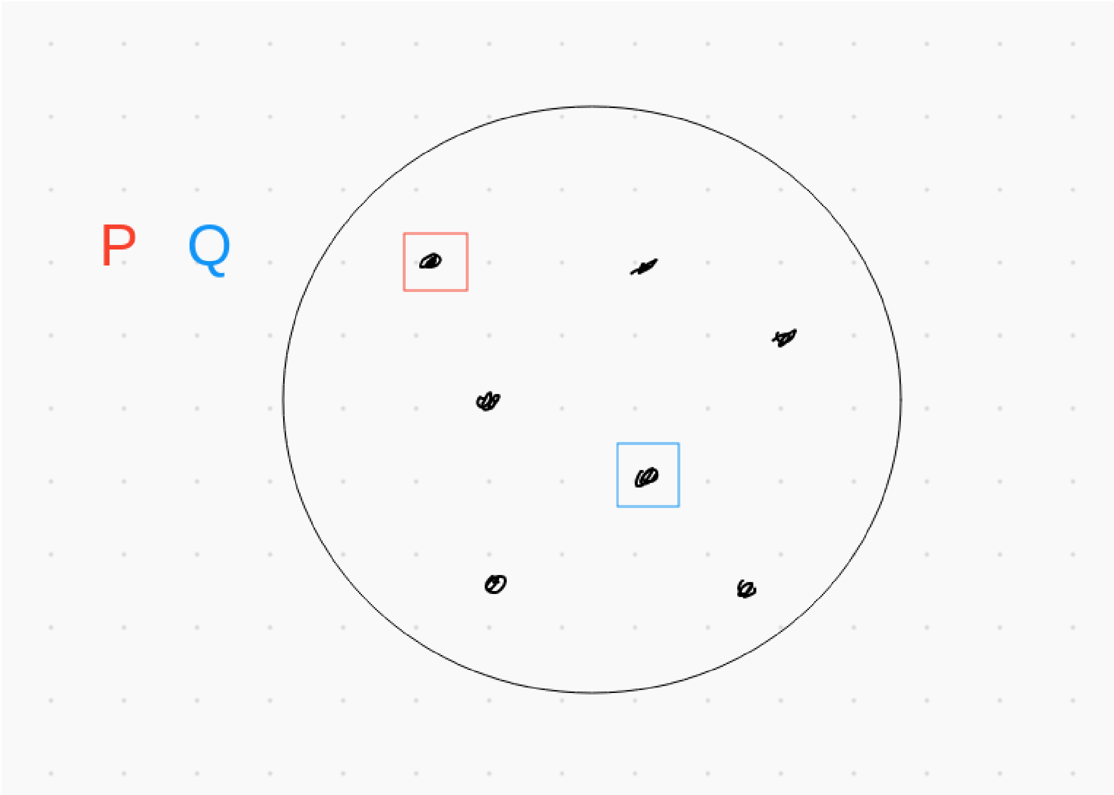
En este caso observamos que la cuantificación existencial sí que afecta a ambas partes de la conjunción. Por lo tanto, se trata del mismo/s individuo/s quien/es tiene/n que cumplir ambas partes de la conjunción. El modelo definido en el caso previo sirve también aquí.

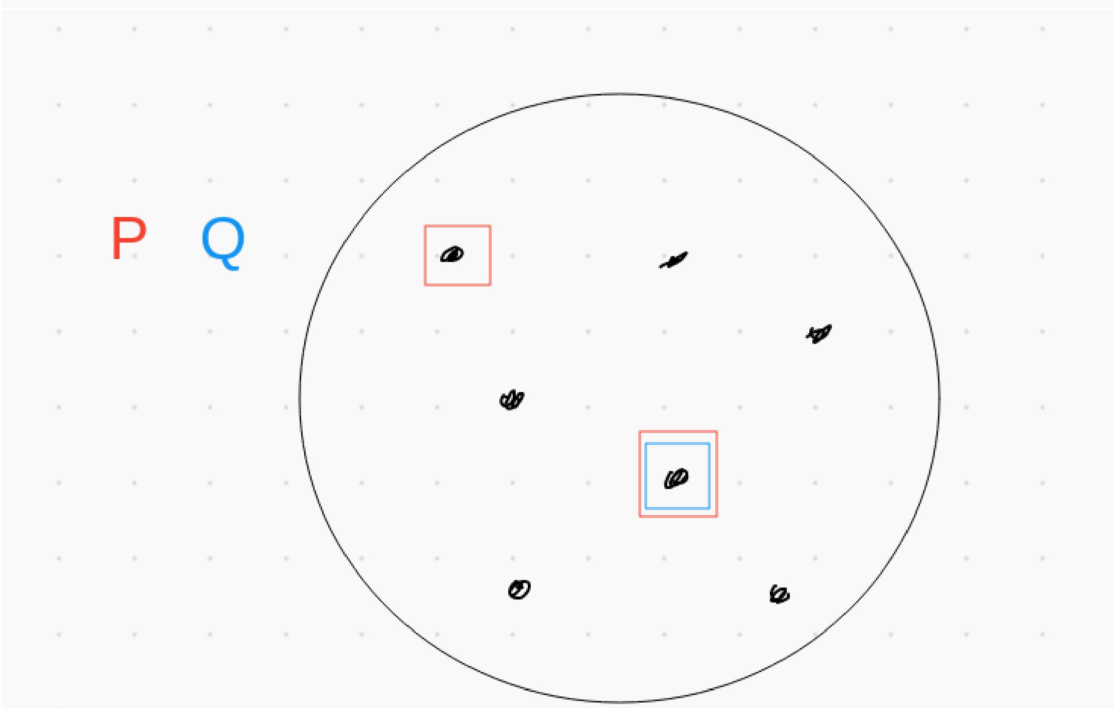


3. $\exists x Px \land \exists x Qx$

Este caso es análogo al primero.

En este caso observamos que la cuantificación universal afecta a toda la implicación. Por lo tanto, nos dice que para cualquier elemento del dominio, si este elemento tiene la propiedad P, entonces tiene la propiedad Q.

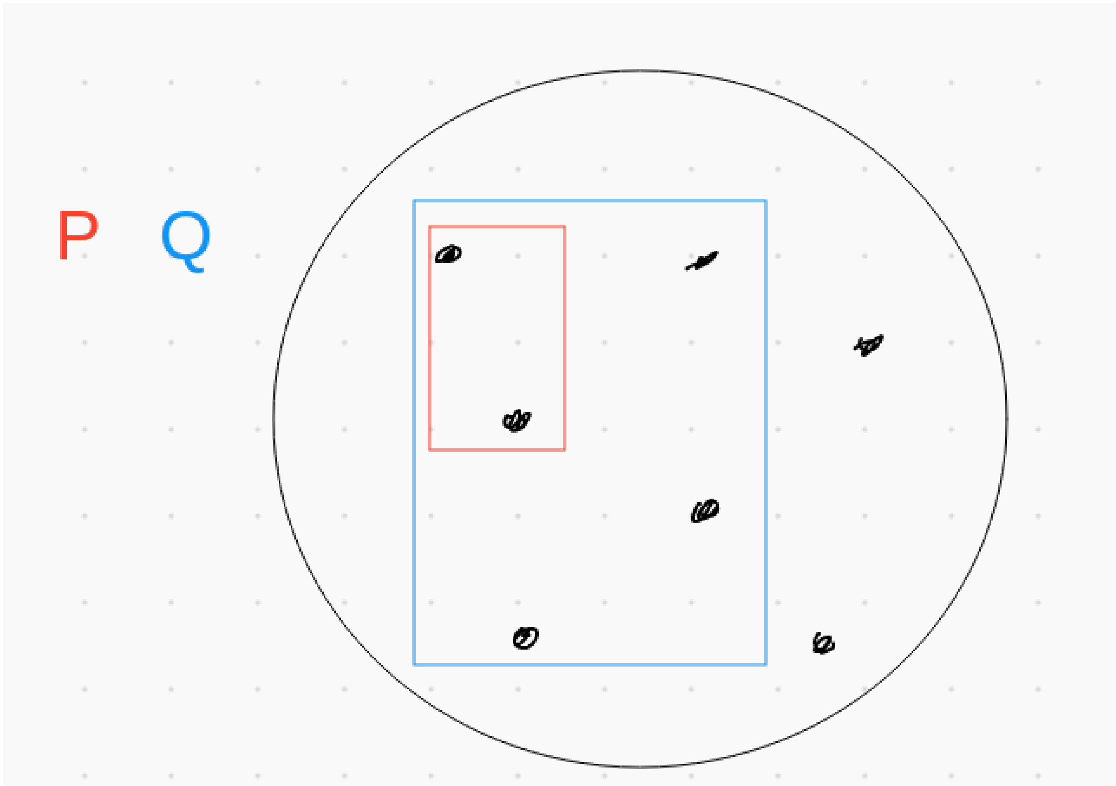




4. $\forall x(Px \to Qx)$

En este caso observamos que la cuantificación universal afecta a toda la implicación. Por lo tanto, nos dice que para cualquier elemento del dominio, si este elemento tiene la propiedad P, entonces tiene la propiedad Q.

CUIDADO NO dice que todos los elementos del dominio tengan la propiedad P y la propiedad Q. Puedes ver la diferencia comparando la sentencia de este apartado a $\forall x(Px \wedge Qx)$.

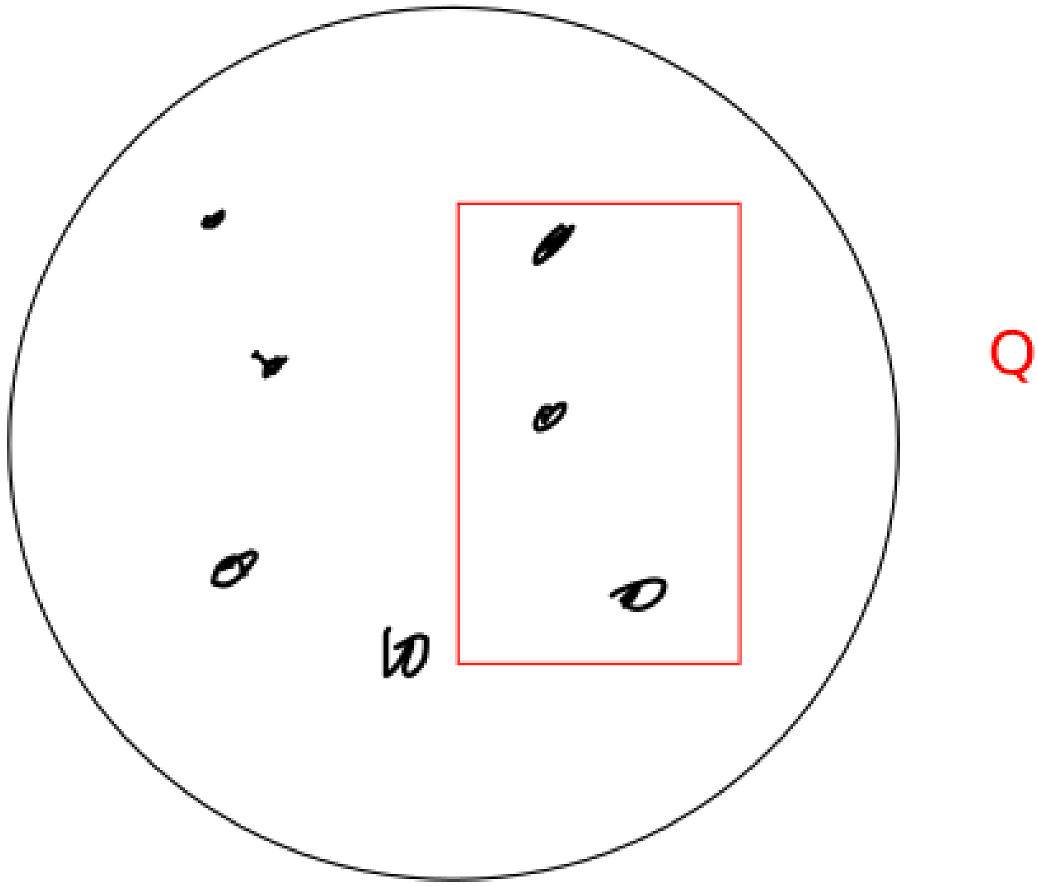


5. $\forall x(Rxx \wedge Px)$

En este caso observamos que la cuantificación universal afecta a toda la conjunción. Nos dice que todo elemento del dominio cumple que: a) Está relacionado consigo mismo por la relación R; b) tiene la propiedad P.

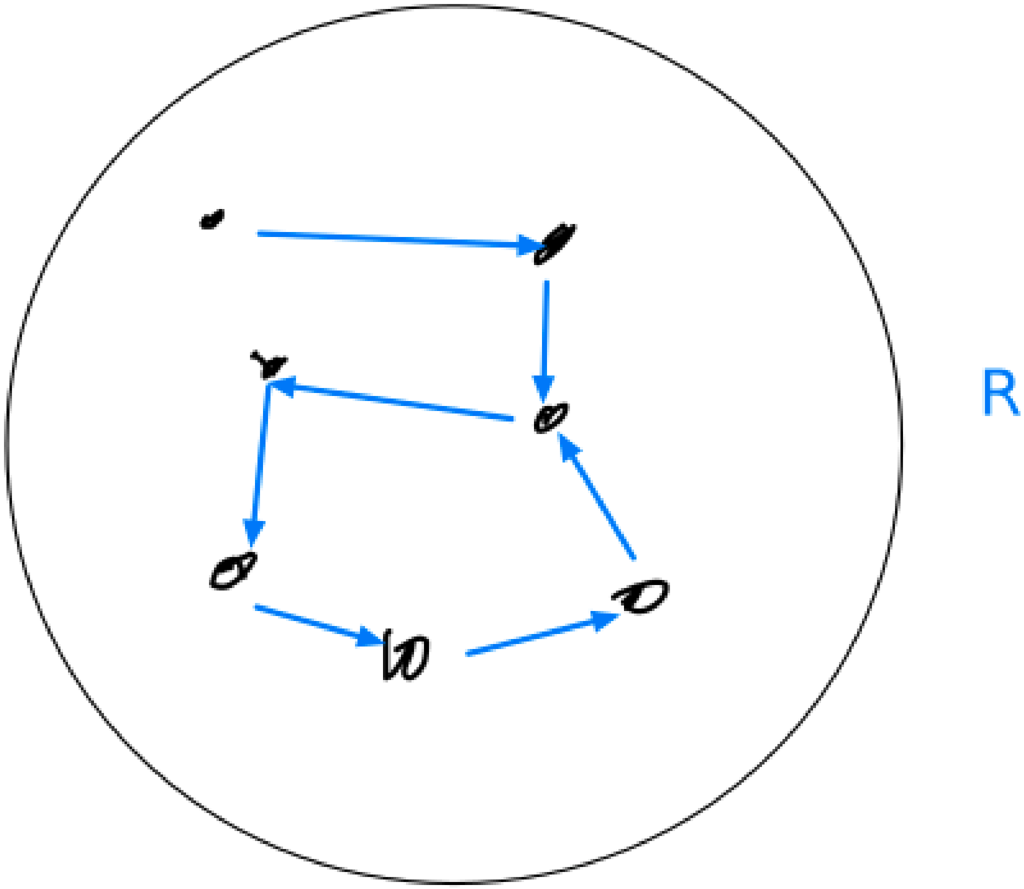
6. $\neg\forall x Qx$

Esta sentencia se trata de una negación. Más concretamente, la negación de una cuantificación universal. Nos dice que no todo el mundo tiene la propiedad Q, o lo que es lo mismo, que existe/n algún/os tipos que no tienen la propiedad Q. Por lo tanto, para hacer cierta esta sentencia basta con encontrar un modelo en el que por lo menos exista un individuo que no tenga la propiedad Q.



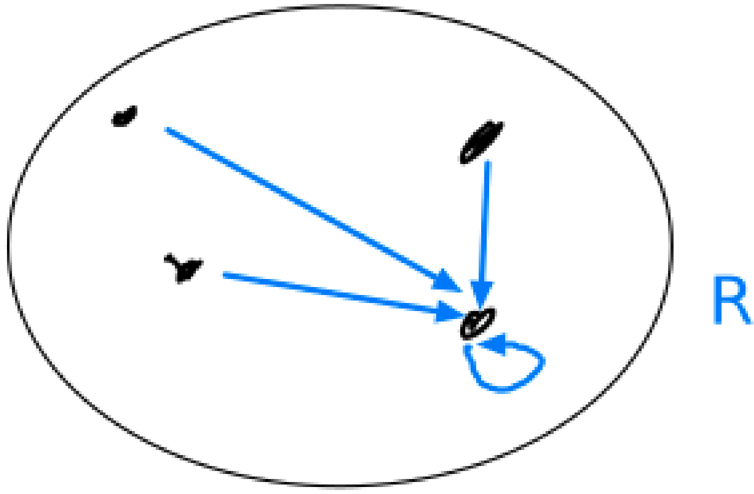
7. $\forall x \exists y Rxy$

Aquí tenemos dos cuantificadores seguidos: un cuantificador universal seguido de uno existencial. Esta sentencia nos dice que para cualquier elemento de nuestro universo existe un elemento con el que se relaciona. Gráficamente, dice que para cualquier elemento del dominio tendremos una flecha que salga desde ese elemento. Hay que tener en cuenta que pese a que usamos variables distintas x e y, nada nos dice que $x \neq y$. Es decir, la flecha podría ir de un punto hacia sí mismo; el elemento podría estar relacionado consigo mismo.



8. $\exists y \forall x Rxy$

Aquí también tenemos dos cuantificadores seguidos pero en distinto orden: un cuantificador existencial seguido por uno universal. Este cambio de orden afecta al significado de la sentencia; nos dice que existe/n un elemento/s en nuestro universo con el/los que se relaciona todo el mundo. Es decir, por lo menos deberíamos tener un punto tal que todos los puntos tengan una flecha hacia él (incluído el mismo!).



8. $\forall x(Px \to Rxc)$
9. Rcc

6. $*$ Para cada una de las sentencias siguientes encuentre, si es posible, una estructura $\mathcal{A}$ en la que la sentencia es verdadera y una estructura $\mathcal{B}$ en la que la sentencia es falsa. Si no es posible explique la razón.

(a) $\forall x(Px \to Qx)$,
(b) $\forall x(Px \to \exists x Qx)$,
(c) $\forall x \neg Px \lor \exists x \neg Qx$,
(d) $\exists x(Px \land \neg Qx)$
(e) $\forall x(Px \lor \neg Qx)$
(f) $\exists x(Px \to Qx)$.

7. $*$ Para cada una de las sentencias siguientes encuentre, si es posible, una es-

7. $*$ Para cada una de las sentencias siguientes encuentre, si es posible, una estructura $\mathcal{A}$ en la que la sentencia es verdadera y una estructura $\mathcal{B}$ en la que la sentencia es falsa. Si no es posible explique la razón.

(a) $\forall x(Px \leftrightarrow \neg Qx)$,
(b) $\forall x \forall y(Rxy \lor Ryx)$,
(c) $\forall y(\forall x Px \leftrightarrow Py)$,
(d) $\forall x(Px \to \forall y Py)$,
(e) $\exists x Px \to \forall y Py$,
(f) $\exists x(Px \to \forall y Py)$,
(g) $\forall x \forall y Rxy \to \forall x \forall y Ryx$,
(h) $\forall x \forall y(Rxy \to Ryx)$,
(i) $\forall x \forall y Rxy \to \forall z Rzz$,
(j) $\forall x(Rxc \leftrightarrow \neg Rxx)$.

Hemos visto los siguientes ejercicios del libro

4. Ejercicios

El principio de extensionalidad

1. Denote por enumeración (si es posible) cada uno de los siguientes conjuntos. Si en algún caso es imposible, diga por qué lo es.
   $A =$ el conjunto de los satélites naturales de la Tierra.
   $B =$ el conjunto de los enteros no negativos.
   $C = \{x : x \text{ es un entero y } 3 \leq x < 8\}$.
   $D = \{x : x \text{ es un entero y } x + x = x\}$.
   $E = \{x : x \text{ es un entero y } x + x = 0\}$.

2. $*$ Denote por comprensión los siguientes conjuntos:
   $$F = \{2, 4, 6, 8\}, \qquad G = \{0\}, \qquad H = \{-2, 2\}, \qquad I = \{1\}.$$

3. $*$ ¿Cuántos elementos tienen los siguientes conjuntos?
   $$J = \{2, 2+2, 4\}, \qquad K = \{1, 2, 1, 3\}, \qquad L = \{1, \{1\}\}, \qquad M = \{\{1\}, \{1, 1\}\}.$$

Página 38, ejercicios 1, 2 y 3

7. $*$ Sean
   $$X = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad Y = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \qquad Z = \{\{1\}, \{2, 3\}, 4\}.$$
   ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas?
   (a) $\emptyset \in X$.
   (b) $\emptyset \subseteq X$.
   (c) $1 \in X$.
   (d) $\{1\} \in X$.
   (e) $\{1\} \subseteq X$.
   (f) $\{3, 4\} \in X$.
   (g) $\{3, 4\} \subseteq X$.
   (h) $1 \in Y$.
   (i) $\{1\} \in Y$.
   (j) $\{1\} \subseteq Y$.
   (k) $\{3, 4\} \subseteq Y$.
   (l) $\{3, 4\} \in Y$.

Página 38, ejercicio 7 (a - l)

6. Ejercicios

Las operaciones básicas

1. * Efectúe las operaciones indicadas:

(a) $\{1,2\} \cup \{\emptyset,1\}$
(b) $\{1,2\} \cup \{\{1,2\}\}$
(c) $\emptyset \cup \{1,2\}$
(d) $\{\emptyset\} \cup \{1,2\}$
(e) $\{1,2\} \cap \{\emptyset,1\}$
(f) $\emptyset \cap \{1,2\}$
(g) $\emptyset \cap \{\emptyset,1\}$
(h) $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset,1\}$
(i) $\{1,2\} - \emptyset$
(j) $\emptyset - \{1,2\}$
(k) $\{\emptyset,1\} - \emptyset$
(l) $\{\emptyset,1\} - \{\emptyset\}$.

2. Efectúe las operaciones indicadas:

(a) $\{\{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset,1\}$
(b) $\{1\} \cup \{\{1\},2\}$
(c) $\{\{1\}\} \cup \{1,2\}$
(d) $\{\{1\}\} \cup \{\{1\},2\}$
(e) $\{1\} \cap \{\{1\},2\}$
(f) $\{\{1\}\} \cap \{\{1\},2\}$
(g) $\{1,2\} \cap \{\{1,2\}\}$
(h) $\{\emptyset,1\} \cap \{\{\emptyset\},1\}$
(i) $\{\emptyset\} - \{\emptyset,1\}$
(j) $\{\{1,2\}\} - \{1,2\}$
(k) $\{\{1\},2\} - \{1,2\}$
(l) $\{\{1\},2\} - \{\{1\}\}$.

Página 54, ejercicios 1 y 2