Conjuntos01

Eduardo Hermo Reyes
ehermo.reyes@gmail.com

December 6, 2020

1 Teoría de conjuntos

1.1 ¿Qué es un conjunto?

- Una colección de objetos a los que llamamos elementos;
- Todo posible objeto puede ser un elemento; incluso otros conjuntos;

Si A es un conjunto y x es un objeto, usamos las expresiones

$$x \in A$$

para decir que x es un elemto de A (o x pertenece a A)

$$x \notin A$$

para decir que x no es un elemento de A (o x no pertenece a A)

1.2 Principio de extensionalidad

- Un conjunto está determinado por sus elementos, es decir:

$$A = B \text{ sii } A \text{ y } B \text{ tienen los mismos elementos}$$

Lo que importa de un conjunto **NO** es cómo lo definimos sino los elementos que contiene.

EJEMPLO

$A :=$ el conjunto de todos los números naturales mayores que 0;

$B :=$ el conjunto de todos los números naturales mayores o iguales que 1;

- La definición de estos conjuntos es distinta;
- Sin embargo, $A = B$

1.3 Cómo nos referimos a los conjuntos?

1. Comprensión
2. Enumeración

1.3.1 Comprensión

Denotamos un conjunto dando una propiedad que poseen todos los elementos del conjunto y solo ellos.

$$\{x : x \text{ es mayor que } 0\}$$

o

$$\{x : x \text{ es el nombre de un planeta del Sistema solar}\}$$

Sea ϕ una propiedad:

$$\{x : x \text{ posee la propiedad } \phi\}$$

o

$$\{x : \phi(x)\}$$

Podemos reformular el *principio de extensionalidad.*

Sea $A := \{x : \phi(x)\}$ y $B := \{x : \psi(x)\}$:

$$A = B \text{ sii para todo elemento } x, \phi(x) \text{ sii } \psi(x)$$

1.3.2 Enumeración

Denotamos un conjunto por enumeración cuando nombramos todos sus elementos.

- Complicado cuando el conjunto es grande;
- Imposible si es infinito

Ejemplos

$\{1, 2, 3, 4\},\ \{a, b, c\}$, etc

1.3.3 IMPORTANTE:

Por el *principio de extensionalidad* tenemos que:

- Cuando damos un conjunto por enumeración no nos importa el orden!

$$\{0, 1, 2\} = \{1, 2, 0\}$$

- No tendremos en cuenta las posibles repeticiones de los elementos en el conjunto

$$\{0, 1, 2\} = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 2\}$$

1.4 La relación de inclusión ($\subseteq$)

La utilizamos para expresar que un conjunto A está incluido en otro conjunto B o que A es un subconjunto de B

$$A \subseteq B \text{ sii, para todo elemento } x,\ \text{ si } x \in A \text{ entonces, } x \in B$$

También podemos expresar la negación de esta relación:

$$A \not\subseteq B \text{ sii, existe al menos un elemento } x, \text{ tal que } x \in A \text{ y } x \notin B$$

Sean A, B y C conjuntos: 1. $A \subseteq A$; 2. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$; 3. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.

Para todo elemento x:

$$x \in A \text{ sii } \{x\} \subseteq A$$

¿Por qué? Supongamos que $x \in A$. Ahora queremos ver que $\{x\} \subseteq A$. Comprobar esto es lo mismo que comprobar que todos los elementos del conjunto $\{x\}$ pertenecen también a A. En este caso concreto, puesto que $\{x\}$ tiene un solo elemento, x, deberíamos comprobar que $x \in A$. Pero esto es exactamente nuestra suposición de inicio. Por otro lado, supongamos que $\{x\} \subseteq A$. Aplicando la definición de subconjunto vemos que todos los elementos de $\{x\}$ pertenecen también a A. Claramente vemos que x es un elemento de $\{x\}$, por lo que si $\{x\} \subseteq A$, tenemos que x tiene que ser también un elemento de A, es decir, $x \in A$.

1.5 El conjunto vacío

- Existen conjuntos que no tienen elementos.
- Por el principio de extensionalidad, todos esos conjuntos sin elementos son en realidad el mismo.
- Al conjunto sin elementos lo llamamos *el conjunto vacío* ($\emptyset$).

$$\emptyset = \{x : x \neq x\}.$$

- Para todo conjunto A, tenemos que

$$\emptyset \subseteq A.$$

Para confirmar esto, podemos usar las definiciones que hemos visto en el apartado anterior. Supongamos que no nos lo creemos, es decir, $\emptyset \not\subseteq A$. Aplicando la definición de **no ser subconjunto**, tendríamos que debería existir un elemento x tal que, $x \in \emptyset$ y $x \notin A$. Ahora bien, esto es imposible ya que tratándose del conjunto vacío, nunca se cumplirá la condición $x \in \emptyset$ para ningún elemento x. Por lo que, en otras palabras, **no puede ser** que $\emptyset \not\subseteq A$, o lo que es lo mismo, **no puede ser** que **no** sea un subconjunto. Es decir, $\emptyset \subseteq A$.

PREGUNTA

$$\emptyset \stackrel{?}{=} \{\emptyset\}$$

RESPUESTA

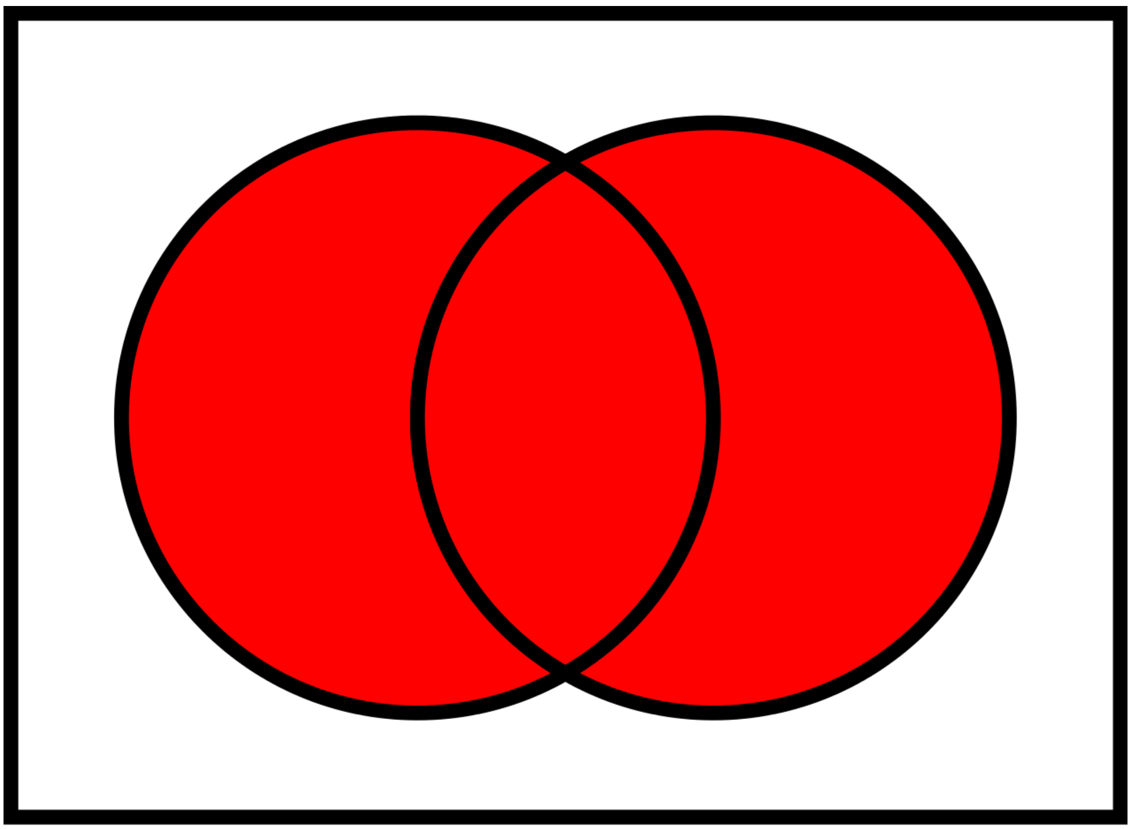
Falso. Tenemos que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. La forma más sencilla de verlo es observar que $\emptyset$ no tiene ningún elemento, mientras que $\{\emptyset\}$ contiene un único elemento; a saber, $\emptyset$. Por lo tanto, por el principio de extensionalidad, sabemos que son conjuntos distintos.

1.6 Unión e intersección

- Operaciones básicas entre conjuntos
- Dados dos conjuntos o más, podemos combinar sus elementos y obtener nuevos conjuntos a partir de estas operaciones

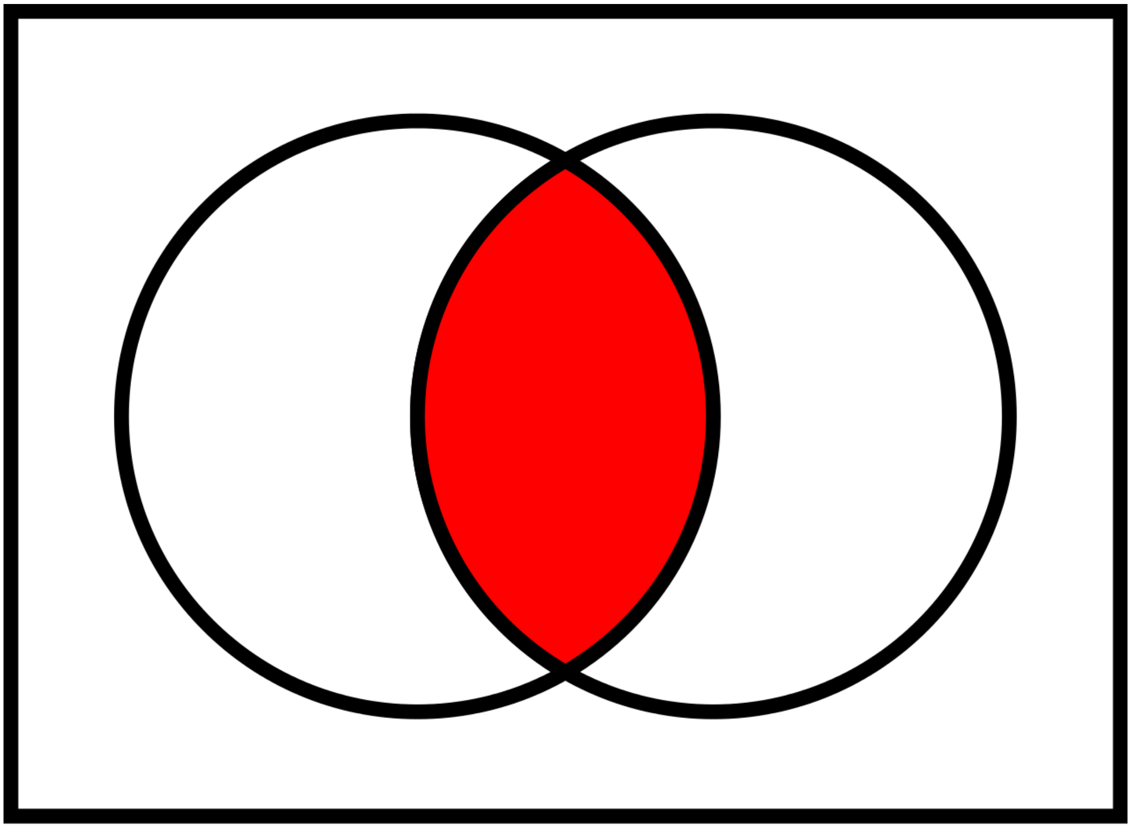
Unión ($\cup$) El conjunto de los elementos que pertenecen a A junto con los elementos de B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$



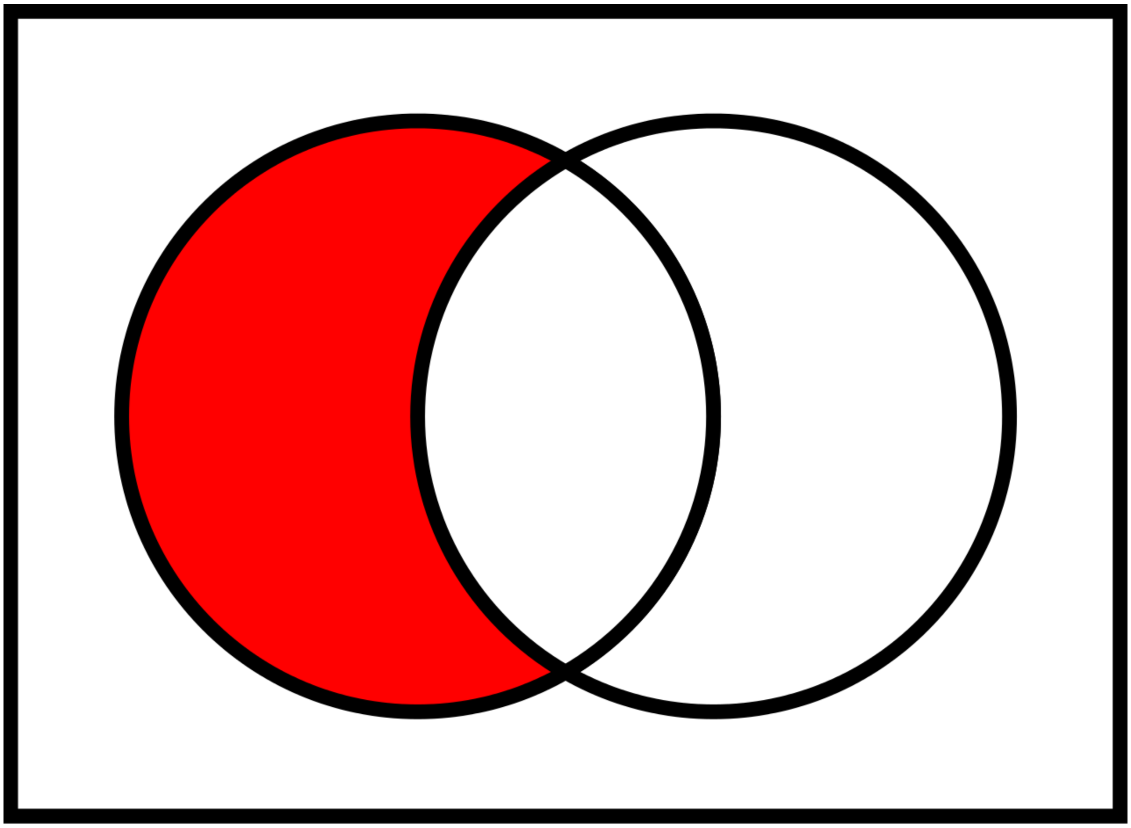
Intersección ($\cap$) El conjunto de los elementos que pertenecen tanto a A como a B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$$



Diferencia $(-)$ El conjunto de los elementos que pertenecen a A pero no a B.

$$A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$$



Ejemplos

Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ y $C = \emptyset$:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A \cap B = \{3\}$
- $A \cup C = A$
- $A \cap C = C$
- $A \cup (B \cap C) = A$

1.6.1 Algunas propiedades

Unión

- $A \cup B = B \cup A$;
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
- $A \cup \emptyset = A$;
- $A \cup A = A$.

Intersección

- $A \cap B = B \cap A$;
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- $A \cap \emptyset = \emptyset$;

- $A \cap A = A$.

Diferencia

- $A - \emptyset = A$;
- $\emptyset - A = \emptyset$;
- $A - A = \emptyset$.

Entre operaciones

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;
- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

1.6.2 Principio de separación

Principio de separación: Si A es un conjunto y ϕ una propiedad, entonces hay un conjunto cuyos elementos son exactamente los elementos de A que tienen la propiedad B.

Es decir, tenemos un conjunto A. Aplicando este principio, ahora podemos obtener un nuevo conjunto B compuesto por aquellos elementos que se encuentran en A y que además, cumplen la propiedad ϕ. Es decir,

$$B = \{x \in A : \phi(x)\}.$$

Esto es lo mismo que decir,

$$B = \{x : x \in A \text{ y } \phi(x)\}.$$

1.7 Pares ordenados y relaciones

- Podemos usar los conjuntos para hablar de propiedades de los elementos pero también nos interesa expresar que ciertos elementos A están en determinada **relación**.
- Para hablar de relaciones, lo primero que podemos observar es que éstas tienen algo así como una dirección; las relaciones se dan entre pares de objetos en cierto orden.
- Usando conjuntos, sabemos que por ejemplo $\{a, b\} = \{b, a\}$ por lo que necesitamos algo más para expresar el orden de los elementos.

1.7.1 Par ordenado

- Dados un par de objetos a y b, con $\langle a, b\rangle$ denotamos el *par odenado de a y b*. Su *primer componente* será a y su *segunda componente* será b.
- El único requisito que exigimos a los pares ordenados es el siguiente. Sean a, b, c y d elementos:

$$(**) \qquad \text{Si } \langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \text{ entonces } a = c \text{ y } b = d.$$

- **Podremos definir una relación como un conjunto de pares ordenados**

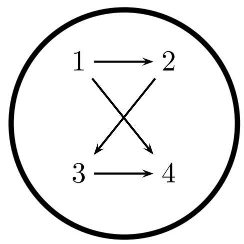
1.7.2 ¿Cómo definimos los pares ordenados en términos de conjuntos?

Existen múltiples definiciones válidas. La que usaremos nosotros será la siguiente:

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Está definición satisface el principio ($**$) que exigimos a los pares ordenados.

Ejemplo: Tomemos el siguiuente conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Podemos definir la relación R en A como un conjunto de pares ordenados cuyas componentes son ambas elementos de A. Es decir, $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$.



Preguta: Existen otras relaciones que podemos definir en A ¿Podrías definir la relación S que satisfaga $\forall x\ Sxx$?

1.8 Producto cartesiano ($\times$)

$A \times B$ designa el conjunto de todos los pares ordenados cuya primer componente es un elemento de A y la segunda componente es un elemento de B.

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$. El producto cartesiano de A por B sería

$$A \times B = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}.$$

Formalmente las relaciones se definen haciendo uso del producto cartesiano; son un subconjunto de éstas. Por ejemplo, cojamos por un lado $A = \{\text{Tolstói}, \text{Dostoyevski}\}$ y por otro, $B = \{$Guerra y paz, Ana Karenina, Crimen y castigo, Los demonios$\}$. Tendríamos entonces que

$$\begin{aligned} A \times B = \{\ & \langle \text{Tolstói, Guerra y Paz} \rangle, \langle \text{Tolstói, Ana Karenina} \rangle, \langle \text{Tolstói, Crimen y castigo} \rangle, \\ & \langle \text{Tolstói, Los demonios} \rangle, \langle \text{Dostoyevski, Guerra y Paz} \rangle, \langle \text{Dostoyevski, Ana Karenina} \rangle, \\ & \langle \text{Dostoyevski, Crimen y castigo} \rangle, \langle \text{Dostoyevski, Los demonios} \rangle \}. \end{aligned}$$

Ahora podemos definir la relación R *ser autor de*. Podemos ver que R es un conjunto de pares ordenados, cuyas primeras componentes son elementos de A y sus segundas componentes son elementos de B. Por lo tanto, $R \subseteq A \times B$. No obstante, sabemos por ejemplo que Dostoyevski no es el autor de Ana Karenina. Por lo que $R \neq A \times B$. Será pues un subconjunto propio. Con todo esto, podemos dar R de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} R = \{\ & \langle \text{Tolstói, Guerra y Paz} \rangle, \langle \text{Tolstói, Ana Karenina} \rangle, \\ & \langle \text{Dostoyevski, Crimen y castigo} \rangle, \langle \text{Dostoyevski, Los demonios} \rangle \} \end{aligned}$$

Hemos visto los siguientes ejercicios del libro

4. **Ejercicios**

El principio de extensionalidad

1. Denote por enumeración (si es posible) cada uno de los siguientes conjuntos. Si en algún caso es imposible, diga por qué lo es.

   $A =$ el conjunto de los satélites naturales de la Tierra.

   $B =$ el conjunto de los enteros no negativos.

   $C = \{x : x \text{ es un entero y } 3 \leq x < 8\}$.

   $D = \{x : x \text{ es un entero y } x + x = x\}$.

   $E = \{x : x \text{ es un entero y } x + x = 0\}$.

2. $*$ Denote por comprensión los siguientes conjuntos:

$$F = \{2, 4, 6, 8\}, \qquad G = \{0\}, \qquad H = \{-2, 2\}, \qquad I = \{1\}.$$

3. $*$ ¿Cuántos elementos tienen los siguientes conjuntos?

$$J = \{2, 2+2, 4\}, \qquad K = \{1, 2, 1, 3\}, \qquad L = \{1, \{1\}\}, \qquad M = \{\{1\}, \{1, 1\}\}.$$

Página 38, ejercicios 1, 2 y 3

7. $*$ Sean

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad Y = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \qquad Z = \{\{1\}, \{2, 3\}, 4\}.$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas?

(a) $\emptyset \in X$.

(b) $\emptyset \subseteq X$.

(c) $1 \in X$.

(d) $\{1\} \in X$.

(e) $\{1\} \subseteq X$.

(f) $\{3, 4\} \in X$.

(g) $\{3, 4\} \subseteq X$.

(h) $1 \in Y$.

(i) $\{1\} \in Y$.

(j) $\{1\} \subseteq Y$.

(k) $\{3, 4\} \subseteq Y$.

(l) $\{3, 4\} \in Y$.

Página 38, ejercicio 7 (a - l)

6. Ejercicios

Las operaciones básicas

1. * Efectúe las operaciones indicadas:

(a) $\{1,2\} \cup \{\emptyset, 1\}$
(b) $\{1,2\} \cup \{\{1,2\}\}$
(c) $\emptyset \cup \{1,2\}$
(d) $\{\emptyset\} \cup \{1,2\}$
(e) $\{1,2\} \cap \{\emptyset, 1\}$
(f) $\emptyset \cap \{1,2\}$
(g) $\emptyset \cap \{\emptyset, 1\}$
(h) $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset, 1\}$
(i) $\{1,2\} - \emptyset$
(j) $\emptyset - \{1,2\}$
(k) $\{\emptyset, 1\} - \emptyset$
(l) $\{\emptyset, 1\} - \{\emptyset\}$.

2. Efectúe las operaciones indicadas:

(a) $\{\{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset, 1\}$
(b) $\{1\} \cup \{\{1\}, 2\}$
(c) $\{\{1\}\} \cup \{1,2\}$
(d) $\{\{1\}\} \cup \{\{1\}, 2\}$
(e) $\{1\} \cap \{\{1\}, 2\}$
(f) $\{\{1\}\} \cap \{\{1\}, 2\}$
(g) $\{1,2\} \cap \{\{1,2\}\}$
(h) $\{\emptyset, 1\} \cap \{\{\emptyset\}, 1\}$
(i) $\{\emptyset\} - \{\emptyset, 1\}$
(j) $\{\{1,2\}\} - \{1,2\}$
(k) $\{\{1\}, 2\} - \{1,2\}$
(l) $\{\{1\}, 2\} - \{\{1\}\}$.

Página 54, ejercicios 1 y 2