Introducción a la lógica
Curso 2018 - 2019

Eduardo Hermo Reyes

24 de octubre de 2018

Ejercicio 1. *Indique si la expresiones siguientes son fórmulas o son expresiones sintácticamente incorrectas. En los casos en los que sea posible, añada o elimine paréntesis de las expresiones incorrectas para que resulte una fórmula:*

1. $\neg(\neg p \wedge q) \to r \wedge s$;
2. $p \wedge q$;
3. $p \wedge q \vee r$;
4. $\neg\neg(\neg p)$;
5. $p \to \neg(\neg q \vee s)$.

Ejercicio 2. *Construya el árbol genealógico de la siguiente fórmula e indique su conectiva principal:*

$$\big((p \vee q) \to \neg(\neg\neg q \wedge r) \big) \wedge (p \wedge r).$$

Ejercicio 3. *Diga si la siguiente fórmula es una tautología, una contradicción o una fórmula contingente. Justifique la respuesta:*

$$\neg\Big((p \wedge q) \vee \big((r \to s) \to (t \vee w)\big) \Big) \leftrightarrow \Big(\neg(p \wedge q) \wedge \neg\big((r \to s) \to (t \vee w)\big)\Big).$$

Ejercicio 4. *Halle una tautología, una contradicción y una fórmula contingente tales que cada una contenga exactamente lo que se señala en cada caso:*

1. *Dos variables proposionales (p y q), conjunción ($\wedge$) y negación ($\neg$);*
2. *Dos variables proposionales (p y q), implicación ($\to$) y negación ($\neg$).*

Ejercicio 5. *En clase hemos visto una única conectiva unaria, la negación ($\neg$), y las siguientes conectivas binarias: conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicación ($\to$) y bicondicional ($\leftrightarrow$).*

1. *Defina una nueva conectiva unaria ($|$) determinando su tabla de verdad;*
2. *Defina una nueva conectiva binaria ($*$) determinando su tabla de verdad;*

3. *¿Cuántas conectivas unarias podemos definir en total?*

4. *¿Cuántas conectivas binarias podemos definir en total?*

Ejercicio 6.

1. *Demuestre la siguiente equivalencia lógica:*

$$(p \vee q) \wedge (r \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p) \equiv p.$$

2. *Halle una asignación que confirme lo siguiente:*

$$(p \vee r \vee t) \wedge (r \vee p) \wedge (\neg t \vee \neg r \vee p) \not\equiv p.$$

Ejercicio 7. *Indique si los siguiente enunciados son verdaderos o falsos para cualesquiera fórmulas. En caso de que sea verdadero, justifique la respuesta. Si es falso, encuentre un ejemplo que lo demuestre.*

1. *Si* $\alpha \wedge \beta \models \gamma$*, entonces existe una asignación* v *tal que* $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ *y* $v(\gamma) = 1$*;*

2. *Si* $\alpha \models \beta$ *and* $\neg\alpha \models \beta$*, entonces* β *es una tautología;*

3. *Si* β *es una contradicción y* $\alpha \models \beta$*, entonces* $\beta \models \alpha$*;*

4. *Si* $\alpha \wedge \beta$ *es una contradicción, entonces* $\alpha \models \neg\beta$*.*

Ejercicio 8. *Diga si los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfacibles o no. Si el conjunto es satisfacible, halle una asignación que lo satisfaga.*

1. $\{p \to q,\ \neg q \wedge r,\ p \wedge (r \vee q)\}$*;*

2. $\{p \vee (q \wedge r),\ p \to \neg r, q \leftrightarrow r\}$*;*

3. $\{p \to (q \vee t),\ p \wedge \neg s,\ t \to s\}$*;*

Soluciones parciales

Nota: Algunos de los ejercicios admiten más de una solución.

Solución 1.

1. **Es una expresión sintácticamente incorrecta**:

$$\neg(\neg p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s);$$

2. **Es una fórmula**;

3. **Es una expresión sintácticamente incorrecta**:

$$p \wedge (q \vee r)$$

o

$$(p \wedge q) \vee r.$$

Solución 2.

Solución 3.

Sea $\alpha := (p \wedge q)$ y $\beta := \big((r \rightarrow s) \rightarrow (t \vee w)\big)$. La fórmula de este ejercicio puede ser reescrita entonces como:

$$\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta).$$

Además, ocurre que

$$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

por lo que podemos concluir que $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ es una tautología.

También es posible resolverlo mediante el uso de las tablas de verdad. [1]

Solución 4.

2.
   - **Fórmula contingente:** $\neg(p \rightarrow q)$;
   - **Tautología:** $p \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$;
   - **Contradicción:** $\neg\big(p \rightarrow (\neg q \rightarrow p)\big)$.

Solución 5.

1.

α	$\vert\alpha$
1	1
0	1

[1]En España se consumieron 6.6 millones de toneladas de papel durante 2017.

2.

α	β	$(\alpha * \beta)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

3. 4;

4. 16.

Solución 6.

1. Si $v(p) = 1$ entonces $v(p \vee q) = v(r \vee p) = v(\neg q \vee \neg r \vee \vee p) = 1$ y por lo tanto $v\big((p \vee q) \wedge (r \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \vee p) \big) = 1$.

   Si $v(p) = 0$ y $v(q) = v(r) = 1$ tendríamos que $v(\neg q) = v(\neg r) = 0$. Por lo tanto, $v(\neg q \vee \neg r \vee \vee p) = 0$ y así $v\big((p \vee q) \wedge (r \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \vee p) \big) = 0$.

   Si $v(p) = 0$ y ocurre que $v(q) = 0$ o $v(r) = 0$ entonces $v(p \vee q) = 0$ o $v(r \vee p) = 0$ y por lo tanto $v\big((p \vee q) \wedge (r \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \vee p) \big) = 0$.

   También es posible resolverlo mediante el uso de las tablas de verdad.[2]

Solución 7.

1. **Falso.** Sea $\alpha := p$, $\beta := \neg p$ y $\gamma := q$. Tenemos que $\alpha \wedge \beta \models \gamma$ pero sin embargo, no existe asignación v tal que $v(\alpha \wedge \beta) = 1$.

2. **Verdadero.** Supongamos que $\alpha \models \beta$ y $\neg\alpha \models \beta$. Supongamos también en busca de una contradicción que β no es una tautología. Entonces existe al menos una asignación v tal que $v(\beta) = 0$. Ahora bien, puesto que $\alpha \models \beta$ esa misma asignación v también debe hacer falsa a α. Entonces, $v(\neg\alpha) = 1$ y $v(\beta) = 0$ por lo que $\neg\alpha \not\models \beta$, en contra de nuestra suposición.

Solución 8.

2. **Es satisfacible.** La asignación $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ y $v(r) = 0$ hace verdaderas a todas las fórmulas del conjunto;

3. **Es satisfacible**. La asignación $v(p) = 1$, $v(q) = 1$, $v(s) = 0$ y $v(t) = 0$ hace verdaderas a todas las fórmulas del conjunto.

[2] Algunos datos sobre impacto ambiental del papel/cartón: www.ehu.eus/es/web/araba/campus-iraunkorra-papera-eta-kartoia/-/asset_publisher/P36s/content/info_cs_impactomedioambientalpapelycarton