Konstruktivismus und Intuitionismus

Matthias Baaz and Rosalie Iemhoff *
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie E104
Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstrasse 8-10
1040 Wien
baaz,iemhoff@logic.at

1 Was heißt Konstruktiv und Konstruktivismus?

Zu den möglichen Eigenschaften mathematischer Beweise wie elementar oder elegant gehört auch der Begriff konstruktiv. Damit wird die Situation beschrieben das eine Existenz Aussage nicht ohne die Angabe eines existierenden Objekt formuliert wird, und das Disjunktionen es erlauben den gultigen Bestandteil herauszugreifen. Das ist:

- existentiele Sätze sollen eine Zeuge erhalten,
- disjunktive Sätze sollen entscheiden welchen Disjunkt gilt.

Die erste Anforderung bedeutet zum Beispiel das ein Beweis von einem Theorem "Es gibt eine Zahl n sodaß ...", eine Konstruktion von dieser Zahl enthalten soll: er soll andeuten welche Zahl n überhaupt gemeint ist. Schauen wir uns zum Beispiel das folgende Theorem an.

Theorem 1 Jede natürliche Zahl hat eine Primfaktorzerlegung.

Dieser Satz hat einen konstruktiven Beweis. Denn es gibt einen Algorithmus das diese Primfaktorzerlegung berechnet. Folgendes ist ein berümhtes Beispiel von einem Beweis der nicht konstruktiv ist.

Theorem 2 Es gibt zwei irrationale Zahlen x und y sodaß x^y rational ist.

Proof Betrachte die Zahl $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$. Entweder ist sie rational, oder sie ist irrational. Im ersten Fall beweist $x = y = \sqrt{2}$ den Satz, im zweiten Fall reicht $x = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ und $y = \sqrt{2}$. □

Der Beweis ist nicht konstruktiv weil es uns nicht zeigt welche Zahlen x und y nun wirklich sind. Es gibt natürlich auch konsruktive Beweisen von diesem

*Supported by the Austrian Science Fund FWF under project P17503.

Satz: es ist bewiesen worden das e und $ln\,2$ nicht rational sind, und so ist mit $x = e$ und $y = ln\,2$ das Theorem konstruktiv bewiesen. Es ist auch bewiesen worden das $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ tranzendent ist, so $x = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ und $y = \sqrt{2}$ reichen auch um das Theorem zu beweisen.

Der nicht konstruktive Beweis oben zeigt uns auch wie eine Disjunktion nicht konstruktiv sein kann. Im Beweis verwenden wir das $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ entweder rational oder irrational ist ohne anzugeben welcher der Beiden den Fall ist.

Wir nennen ein Theorem *konstruktiv* wenn es einen konstruktiven Beweis hat. Wir nennen ihn *nicht konstruktiv* wenn wir wissen, das heißt, wenn wir beweisen können, das es so einen Beweis nicht gibt. Es sollte klar sein das es mit dieser Terminologie drei Arten von Beweisen gibt: konstruktive, nicht konstruktive, und die Beweisen von wenen wir nicht wissen ob sie konstruktiv sind oder nicht. So im letzen Fall gibt es einen nicht konstruktiven Beweis von dem Theorem, aber es ist unklar ob es vielleicht auch noch einen konstruktiven Beweis gibt.

Beispielen konstruktiver Theoremen. Das obere Theorem ist ein Beispiel von einem konstruktiven Theorem. Die Hauptstellung der Algebra auch: es gibt Beweisen die eine Konstruktion erhalten womit man die Nullstellen eines gegebenen Polynoms berechnen kann. Hier sind natürlich Berechnungen der endlichen Annäherungen der Nullstellen gemeint. Kruskals Theorem und Van Der Waerdens Theorem sind wieder andere Beispielen konstruktiver Theoremen [4, 9, 15].

Beispiel einem nicht konstruktiven Theorem. Ein Beispiel von einem nicht konstruktiven Theorem ist das Graph Minor Theorem.

Theorem 3 (Robertson und Seymour) Die Struktur der finiten Graphen mit der minoren Ordnung hat keine unendlichen Antiketten.

Das heißt das es für jedes Ideal I endlich vielen Graphen $F_1, \ldots, F_n$ gibt so das $F \in I$ dann und nur dann wenn für keine $i \leq n$ die Graph F_i einen Minor von F ist. Die Menge $F_1, \ldots, F_n$ nennt man eine Obstruktions Menge für I. Das Graph Minor Theorem ist nicht konstruktiv: im 1988 bewiesen Michael Fellows und Michael Langston [5] das es keinen Algorithmus gibt das für jedes Ideal seine Obstruktions Menge konstruiert.

Beispiel einem Theorem von wem nicht bekannt ist ob es konstruktiv ist oder nicht. Neulich ist von Wadim Zudilin [16] bewiesen worden das für die Riemannische Zeta Funktion ζ zumindestens einer von den Zahlen $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, und $\zeta(11)$ irrational ist. Es ist aber bis jetzt unbekannt welchen von diesen vier Zahlen irrational sind.

1.1 Mathematik und Logik

Konstruktivismus besitzt zwei Lösungsansätze: einen *mathematischen* und einen *logischen.*

Beim mathematischen Teil versucht man die ganze Mathematik konstruktiv zu entwickeln. Erret Bishop ist einer der Hauptvertreter dieser Richtung. In seinem Hauptwerk *Foundations of constructive Analysis* [1] baut er die Mathematik konstruktiv in einem grad auf, den man vorher nicht für möglich gehalten hätte. Er zeigt das ein Hauptteil der klassischen Analysis konstruktiv ist, oder ein natürliches konstruktives Äquivalent hat. Seine Arbeit wird seither von vielen weitergeführt [2, 3].

Beim logischen Lösungsansatz versucht man die formalen Rahmenbedingungen insbesonders die Logik selbst, so einzuschränken daß man überhaupt keine nicht konstruktive Sätze beweisen kann. Vorteil von dieser Vorgehungsweise ist die Uniformität. Wenn ein Theorem einen Beweis im formalen konstruktiven System hat ergibt sich sofort daß das Theorem konstruktiv ist, ohne daß das für jede einzelne Schritt im Beweis überprüft werden muß.

Die sogenannten Russischen Konstruktivisten, zum Beispiel, haben sich nur von einer eingeschränkten Logik, der *intuitionistischen Prädikatenlogik*, bedient. Diese Logik, auf die wie noch weiter zurückkommen werden, ist eine Einschränkung vom klassischen Kalkül in der das Tertium Non Datur, i.e. $\varphi \vee \neg\varphi$, nicht gilt. Daß sollte nach der vorigen Diskussion offensichtlich sein: es gibt Fälle, wo weder φ noch $\neg\varphi$ einen Beweis haben. Das gleiche gilt für nicht konstruktive Schemata wie

$$\neg\forall x\varphi(x) \rightarrow \exists x\neg\varphi(x).$$

Im zweiten Abschnitt werden der ursprüngliche Definition der intuitionistischen Logik mittels Kalkül und die mittels Sequentbegriff entwickelt.

Die intuitionistische Logik, bezeichnet mit IQC, hat viele schönen Eigenschaften die man von einer konstruktiven Kalkül erwarten soll:

Theorem 4 (Disjunktionseigenschaft)

$$\mathsf{IQC} \vdash \varphi \vee \psi \;\Rightarrow\; \mathsf{IQC} \vdash \varphi \text{ oder } \mathsf{IQC} \vdash \psi.$$

Theorem 5 (Existenzeigenschaft)

$$\mathsf{IQC} \vdash \exists x\varphi(x) \;\Rightarrow\; \exists t\ \mathsf{IQC} \vdash \varphi(t).$$

Es ist klar das die klassische Kalkül diese Eigenschaften nicht hat, da zum Beispiel die folgenden Formeln klassisch ableitbar sind:

$$\varphi \vee \neg\varphi \qquad\qquad \exists x\big(\varphi(x) \vee \forall x\neg\varphi(x)\big).$$

Wenn man konstruktive Theorien erstellt soll natürlich auch darauf geachtet werden daß die Axiomen konstruktiv sind. Hier ist leider nicht der Ort darauf einzugehen.

Wie vorher besprochen gibt es über die konstruktivität eines Theorems in dem meisten Fälle Übereinstimmung. Die Theoremen Bishops zum Beispiel, werden von fast allen als konstruktiv akzeptiert. Im Ganzen betrachtet ist der Konstruktivismus aber eine nicht vollkommen klar gefaßte Sache. Das ist auch der Grund weswegen es verschiedene Arten von Konstruktivismus gibt. Viele von diesen Strömungen finden in der Informatik wichtige Anwendungen. Das ist offensichtlich da die Informatik auf Berechnungen beruht, und Berechnungen sind auch der Kern der konstruktiven Beweise.

2 Was heißt Intuitionismus?

Intuitionismus geht auf den berümthen niederländischen Mathematiker Lutzen E.J. Brouwer zurück [11, 6]. Ziel des Intuitionismus ist im Sinne Kants die Sätze der Wissenschaft in analytischen und synthetischen Sätze zu unterteilen. Analytische Sätze sind dabei Sätze deren Gültigkeit nicht von irgendeinem Bezug auf die Aussenwelt abhängt. Deswegen wird das Prinzip des Ausgeschlossenen Dritten, $\varphi \vee \neg\varphi$, nicht als analytisch betrachtet da es ja eine Aussenwelt voraussetzt in der φ interpretiert wird, und φ ist dort wahr oder falsch. Und deswegen ist $\varphi \vee \neg\varphi$ im klassischen Sinn wahr.

2.1 Der Satz von Cantor und das Überabzählbare

Aus dem Satz von Georg Cantor folgt das die Existenz einer unendlichen Menge eine Vielheit von Unendlichkeiten zu Folge hat die in der Welt unserer Wahrnehmung nichts Entsprechendes besitzen. Der Intuitionismus betrachtet das als eine entscheidende Inkorrektheit der klassischen Mathematik. Auf den ersten Blick erscheint es aber das die Kardinalität des Kontinuums größer als abzählbar sein muß. Dem Intuitionismus gelingt es aber eine Formulierung der reelen Zahlen zu finden bei der das Kontinuum nur potentiel Unendlich ist. Die Idee ist dabei das die Zeit als einen zusätzliche Parameter der mathematischen Objekte hinzugenommen wird. Dadurch sind die mathematischen Objekte im Moment der Anwendung nicht vollständig entwickelt wie in der klassischen Mathematik. Die reelen Zahlen entsprechen dabei Wahlfolgen deren Fortsetzung zu jedem Zeitpunkt nicht festgelegt ist.

2.2 Intuitionistische Analyse

Die reele Zahlen, das heißt, die Wahlfolgen sind unendliche Reihen von natürlichen Zahlen, niemals abgeschlossen, immer wachsend. Wir bezeichnen die Wahlfolgen mit a, b, $\ldots$, wobei a_i das i-te Element von a bedeutet. Die Elemente der Reihe können volkommen willkürlich sein oder mit Hilfe eines bestimmten Algorithmuses zustanden kommen: beide Fälle sind zulässig.

Da die mathematischen Objekte also noch in Entwicklung sind können nur stetige Funktionen zugelassen werden, da sich die Funktion mit dem Objekt weiter entwickeln muß. Das empfand Brouwer keineswegs als Einschränkung da zum Beispiel der (nicht stetige) Isomorphismus zwischen $[0,1]^2$ und $[0,1]^3$ zur quantitative Gleichheit führt; die der Anschauung jedes Kindes wiederspricht. Betrachten wir die Funktion f auf den reelen Zahlen. Jedes Anfangssegment von $f(a)$ ist durch ein endliches Anfangssegment von a bestimmt. Das ergibt genau die Stetigkeit von f.

2.3 Das Bar Theorem

Das wichtigste Beweismittel in der intuitionistischen Analysis ist das Bar Theorem. Ein *Bar* ist ein Paar von Eigenschaften (R, S), das ist, ein Paar von zwei Mengen von endlichen Wahlfolgen von natürlichen Zahlen, sodaß

- $\forall a \forall i \big(\langle a_0, \ldots, a_i\rangle \in R \vee \langle a_0, \ldots, a_i\rangle \notin R\big)$,
- $\forall a \exists i \; a_i \in R$,
- $\forall a \forall i \big(\langle a_0, \ldots, a_i\rangle \in R \rightarrow \langle a_0, \ldots, a_i\rangle \in S\big)$,
- $\forall a \forall i \big(\forall n \langle a_0, \ldots, a_i, n\rangle \in S \rightarrow \langle a_0, \ldots, a_i\rangle \in S\big)$.

(Diese Terminologie unterscheidet sich zwar etwas von der Brouwers, aber nicht auf eine wesentliche Weise.)

Theorem 6 Wenn (R, S) ein Bar ist, denn $\langle\rangle \in S$.

Das Bar Theorem ist von Brouwer bewiesen worden, aber auf eine Art und Weise die vielen Anschauungsmomenten enthält. Deshalb sollte es eher als einen Axiom oder als ein Theorem betrachtet werden. Die vielen fundamentalen Anwendungen des Bar Theorems im Intuitionismus, auch als Grundlage des Fan Theorems das wir noch weiter bediskutieren werden, deuten auch darauf hin.

2.4 Intuitionistische Logik

Anders als in der klassischen Logik stammt die intuitionistische Logik nicht aus einem semantischen Bezug sondern aus einer Analyse der Arbeiten Brouwers, durchgefürht vom Arend Heyting, dem Schüler Brouwers. Heyting fand über tausend logischen Transformationen und kompelierte sie zu dem bekannten System der intuitionistischen Logik [10]:

Axiomen

$$
\begin{array}{ll}
\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) & \big(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)\big) \rightarrow \big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\big) \\
\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi & \psi \rightarrow \varphi \vee \psi \\
\multicolumn{2}{l}{(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow \big((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow \big((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi\big)\big)} \\
\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi & \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \\
\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi) & \bot \rightarrow \varphi \\
\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(t) & \varphi(t) \rightarrow \exists x \varphi(x) \\
\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall y \psi(y)) & (x \text{ nicht in } \varphi) \\
\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists y \varphi(y) \rightarrow \psi) & (x \text{ nicht in } \psi)
\end{array}
$$

Regeln

$$
\frac{\varphi \qquad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \qquad\qquad \frac{\varphi(x)}{\forall x \varphi(x)}
$$

Sehr wenig war aus offentsichtlichem Grund über diese intuitionistische Logik bekannt. Kurt Gödel zeigte in einer frühen Arbeit daß es sich nicht um eine mehrwertige Logik handelt. Der wirkliche Durchbruch im Verständnis der Beziehung zwischen intuitionistischen und klassischen Logik wurde allerdings durch Gerhard Gentzen erzielt der eine gemeinsamen Kalkül für klassische und intuitionistische Logik definiert hat bei dem die intuitionistische Logik eine einfache beweistheoretische Einschränkung der klassischen Logik ist.

2.5 Der Gentzen Kalkül LJ

Eingefürht von Gerhard Gentzen im Jahr 1934 [7, 8], ist der Gentzen Kalkül einer der schönsten Formalisierungen der intuitionistischen Logik. Er ist einen formalen System von Regeln für die Ableitung von Sequenten statt von Formeln. Ein *Sequent* ist ein Ausdruck $\Gamma \Rightarrow \Delta$, wobei Γ und Δ endliche Mengen sind. Die Interpretation von $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist $(\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta)$. Es ist nicht schwierig einzusehen daß die folgenden Regeln alle konstruktiv sind.

Axiomen

$Ax\;\; P \Rightarrow P \quad$ (P eine atomaire Formel) $\qquad L\bot\;\; \bot \Rightarrow$

Regeln

$$\text{LW}\ \frac{\Gamma \Rightarrow C}{\Gamma, A \Rightarrow C} \qquad\qquad \text{RW}\ \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow C}$$

$$\text{LC}\ \frac{\Gamma, A, A \Rightarrow C}{\Gamma, A \Rightarrow C}$$

$$\text{L}\wedge\ \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow C} \qquad\qquad \text{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$\text{L}\vee\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow C \qquad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow C} \qquad\qquad \text{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1}\ i = 0, 1$$

$$\text{L}\rightarrow\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow C} \qquad\qquad \text{R}\rightarrow\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$$

$$\text{L}\forall\ \frac{\Gamma, A(t) \Rightarrow C}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow C} \qquad\qquad \text{R}\forall\ \frac{\Gamma \Rightarrow A(y)}{\Gamma \Rightarrow \forall x A[x/y]}\ *$$

$$\text{L}\exists\ \frac{\Gamma, A(y) \Rightarrow C}{\Gamma, \exists x A[x/y] \Rightarrow C}\ * \qquad\qquad \text{R}\exists\ \frac{\Gamma \Rightarrow A(t)}{\Gamma \Rightarrow \exists x A(x)}$$

$$\text{Schnitt}\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma, A \Rightarrow C}{\Gamma \Rightarrow C}$$

Das $*$ ist die Bedingung daß die Variabele y nicht in Γ und C vorkommt.

Einen der schönsten Eigenschaften dieses Systems - neben der ausgesprochene Eleganz - ist die Tatsache daß der Kalkül LK für die klassische Logik aus LJ

dadurch hervorgeht das auf der rechten Seite des $\Rightarrow$ mehr als eine Formel stehen darf. In die LJ sind nur Sequenten mit einer Formel auf der rechten Seite zugelassen. LK hat dadurch eine zusätzliche Regel für die rechte Kontraktion, die in der intuitionistische Variante nicht ausdruckbar ist:

$$\text{RC}\ \frac{\Gamma \Rightarrow C, C, \Delta}{\Gamma \Rightarrow C, \Delta}$$

Mit Hilfe des Kalküls LJ lassen sich die konstruktiven Eigenschaften der intuitionistischen Logik beweisen, so wie die Disjunktions- und die Existenzeigenschaft die wie oben diskutiert haben. Deswegen dient die intuitionistische Logik auch als Kernlogik von vielen Systemen des Konstruktivismus. Sie wird dabei aber auch durch Hinzuname von Regeln erweitert die an der Konstruktivität der Beweisen nichts ändern aber intuitionistisch unzulässig sind. Für den Konstruktivismus ist es wichtig möglichst reichhaltige Systeme zu entwickeln die aber noch immer konstruktiv sind.

2.6 Semantik der intuitionistischen Logik

Aus dem Vorhergesagten folgt daß die intuitionistische Logik keine eigentliche Semantik besitzt. Man kann viele algebraische Modellbegriffen definierien die die Eigenschaft haben daß die Menge der in allen Modellen wahren Sätze mit dem herleidbare Sätze der intuitionistischen Logik zusammenfällt. Diese Strukturen sind aber intuitionistisch nicht zulässig obwohl sie die Arbeit mit der intuitionistischen Logik sehr erleichtern. Beispiel ist die sogenannte *Kripke Semantik*, eingeführt von Saul Kripke in 1965 [13]. Der einzige semantische Ansatz innerhalb des Intuitionismus ist die Brouwer-Heyting-Kolmogorov Interpretation die die Beweise als Interpretation der bewiesenen Sätze auffaßt. In diesem Sinn ist eine Formel genau dann wahr wenn sie einen Beweis hat. Die Operationen und Quantoren werden hier mit Konstruktionen über Beweise indentifiziert. Wichtig ist dabei daß der Begriff der Konstruktion im intuitionistischen Sinn kein abgeschlossener ist.

3 Konstruktivismus versus Intuitionismus

Konstruktivismus und Intuitionismus werden oft verwechselt, oder als Austauschpaar betrachtet. Ein Grund für diese Verwirrung liegt in der Bevorzugung der intuitionistischen Logik in Konstruktivismus die aber dort völlig anders betrachtet wird als in Intuitionismus. Im Fall des Konstruktivismus erzeugt der Logik das mathematische System; umgekehrt im Fall des Intuitionismus. Wir wollen nun einige wichtigen Beispiele angeben bei denen der Unterschied zwischen konstruktiv und intuitionistisch schlagend wird.

Reele abgeschlossene Körper Wenn man die Existenzaxiomen für Nullstellen für Polynomen ungeraden Grades durch Definitionsaxiomen für algebraische Funktionen ersetzt ist die Theorie der reelen abgeschlossenen Körper in klassischen

Logik volkommen konstruktiv: für jede Existenz Aussage $\exists x \varphi(x)$ kann eine algebraische Zahl r expliziet gemacht werden sodaß $\exists x \varphi(x)$ genau dann wenn $\varphi(r)$ gilt. Legt man hingegen die intuitionistische Logik zugrunden dann ist diese Theorie unentscheidbar und ganz bestimmt nicht konstruktiv.

Markov's Prinzip A. Markov, einer der russischen Konstruktivisten, hat zum ersten Mal beobachtet daß das folgende Prinzip konstruktiv zullässig ist, zumindestens für primitiv rekursive φ (n sei über den Bereich der natürlichen Zahlen definiert):

$$\neg\neg\exists n\, \varphi(n) \rightarrow \exists n\, \varphi(n).$$

Die Kenntnis von $\neg\neg\exists n\, \varphi(n)$ bedeutet daß es *nicht* so ist das es *keine* natürlichen Zahlen n gibt sodaß $\varphi(n)$. Aber dann kann man die natürlichen Zahlen durchsuchen und ein n finden finden sodaß $\varphi(n)$. Das zeigt daß das Prinzip konstruktiv gültig ist. Die Markov Regel ist sicher nicht intuitionistisch zulässig da das Abbrechen der Suche nach dem Zeugen nicht *im* System beschrieben werden kann.

Fan Theorem Ein berümhtes Prinzip das im Intuitionismus aber nicht im Konstruktivismus gültig ist, ist das Fan Theorem. Ein *Fan* ist ein endlich verzweigende Baum von endlichen Folgen natuerlicher Zahlen mit der ueblichen Ordnung.

Theorem 7 (Fan Theorem) Wenn es im einen Fan für jeden Ast a ein i gibt sodaß eine entscheidbare Eigenschaft R gilt für a_i (das i-te Element von a) dann gibt es ein n sodaß für jeden Ast a ein $i \leq n$ existiert sodaß a_i die Eigenschaft R hat.

Es ist nicht schwierig einzusehen das vom klassischen Standpunkt aus das Fan Theorem eine Variante von König's Lemma ist. S.C. Kleene [12] hat gezeigt daß das Fan Theorem nicht konstruktiv gültig ist. Im Intuitionismus folgt das Fan Theorem aus dem vorhergenannten Bar Theorem. Der Grund warum das Fan Theorem nicht konstruktiv gültig ist, liegt in der Existenz nicht berechenbaren Funktionen die aus ihm folgen. Es wiederlegt die formale Version der These von Church [14].

4 Nachwort

Die intuitionistische Logik hat sich gegen die klassische Logik nicht durchgesetzt weil die Fehlerhaftigkeit der klassischen Mathematik vom intuitionistischen Standpunkt aus praktisch bisher ohne irgendwelche Folgen geblieben ist, und weil man deswegen eine Erschwerung des Umganges mit mathematischen Strukturen nicht gewillt ist in Kauf zu nehmen. Der Konstruktivismus existiert sowohl in seiner mathematischen wie in seinen logischen Form weiter und hat in letzter Zeit durch Problemstellungen der Informatik eine neue Bedeutung gewonnen. Dazu gehören insbesondere Versuche aus mathematischen Sätzen konkrete Algorithmen zu extrahieren sowie der Versuch; insbesonders der französischen Logiker, Programme und Beweise zu identifizeren.

References

[1] E.A. Bishop. *Foundations of Constructive Analysis.* McGraw-Hill, 1967.

[2] D. Bridges. *Foundations of real and abstract analysis*, volume 174 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, 1998.

[3] D. Bridges and F. Richman. *Varieties of constuctive mathematics*, volume 97 of *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[4] Thierry Coquand. A constructive topological proof of van der Waerden's theorem. *J. Pure Appl. Algebra*, 105(3):251–259, 1995.

[5] M. Fellows and M. Langston. Nonconstructive tools for proving polynomial-time decidability. *Journal of the ACM*, 35:727–739, 1988.

[6] H. Freudenthal, editor. *L.E.J. Brouwer. Collected Works. Vol 2: Geometry, Analysis, Topology and Mechanics foundations of mathematics.* North-Holland Publishing Company, 1976.

[7] G. Gentzen. Untersuchungen über das logische schliessen. i. *Math. Z.*, 39:176–210, 1934.

[8] G. Gentzen. Untersuchungen über das logische schliessen. ii. *Math. Z.*, 39:405–431, 1934.

[9] Jean-Yves Girard. *Proof theory and logical complexity. Volume I.* Studies in Proof Theory. Bibliopolis, 1987.

[10] A. Heyting. Mathematische grundlagenforschung. intuitionismus. beweistheorie. *Ergebnisse d. Math.*, 3(4), 1934.

[11] A. Heyting, editor. *L.E.J. Brouwer. Collected Works. Vol 1: Philosophy and foundations of mathematics.* North-Holland Publishing Company, 1975.

[12] S.C. Kleene. Recursive functions and intuitionistic mathematics. In *Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass. 1950)*, pages 679–685, 1952.

[13] S. Kripke. Semantical analysis of intuitionistic logic. i. In *Formal Syst. and Recurs. Funct., Proc. 8th Logic Colloquium, Oxford 1963*, pages 92–130, 1965.

[14] A.S. Troelstra and D. van Dalen. *Constructivism in Mathematics*, volume 1. North-Holland, Amsterdam, 1988.

[15] W. Veldman. An intuitionistic proof of kruskal's theorem. *Archive for Mathematical Logic*, 43(2):215–264, 2004.

[16] W. Zudilin. One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irrational. *Russian Mathematical Surveys*, 56(4):774–776, 2001.