

Opgaven plus uitwerkingen betreffende isomorfismen

1 Bewijs dat $(\mathbb{N}, \leq)$ isomorf is met $(\mathbb{N}_{\geq 7}, \leq)$.

Uitwerking Het isomorfisme $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 7}$ wordt gegeven door $f(n) = n + 7$.
We moeten laten zien dat

$$m \leq n \Leftrightarrow f(m) \leq f(n).$$

En inderdaad, $m \leq n \Leftrightarrow m + 7 \leq n + 7$.

2 Zij W de verzameling bestaande uit eindige rijtjes die alleen uit 0-en of alleen uit 1-en bestaan. Het lege rijtje ϵ behoort ook tot W . 0^n staat voor een rijtje van n 0-en, en 1^n voor een rijtje van n 1-en. We definiëren de volgende relatie R op W :

$$\begin{aligned} wRv \Leftrightarrow & \text{ } w = v, \text{ of } w \text{ bevat een } 0 \text{ en } v \text{ niet,} \\ & \text{of } w = \epsilon \text{ en } v \text{ bevat een } 1, \text{ of } v = \epsilon \text{ en } w \text{ bevat een } 0, \\ & \text{of er bestaan getallen } m, n \in \mathbb{N} \\ & \text{met } m \leq n, \text{ en } (w = 1^m \text{ en } v = 1^n) \text{ of } (w = 0^n \text{ en } v = 0^m). \end{aligned}$$

Bewijs dat $(\mathbb{Z}, \leq)$ isomorf is met (W, R) .

Uitwerking Het isomorfisme $f : \mathbb{Z} \rightarrow W$ wordt gegeven door

$$f(n) = \begin{cases} 1^n & \text{als } n > 0 \\ \epsilon & \text{als } n = 0 \\ 0^{-n} & \text{als } n < 0 \end{cases}$$

We moeten laten zien dat

$$m \leq n \Leftrightarrow f(m)Rf(n).$$

$\Rightarrow$: ls $0 < m \leq n$, dan $1^m R 1^n$, en als $m \leq n < 0$, dan $0^{-m} R 0^{-n}$, en als $m < 0$ dan $0^{-m} R \epsilon$, en als $0 < n$ dan $\epsilon R 1^n$.

$\Leftarrow$: dit laat ik aan U, de lezer.