Kansrekening en Statistiek

College 13

Dinsdag 26 Oktober

Indeling:

- Hypothese toetsen
- Filosofie

Hypothese toetsen

Vb.

- Een medicijn wordt aan een groep patiënten toegediend en aan een controlegroep niet. Er moet besloten worden of het medicijn werkt of niet.
- Een fabriek laat een gedeelte van een lading geproduceerde auto's testen op een defect. Er moet besloten worden of de lading goed genoeg is om bij de leverancier af te leveren.
- De schedelgrootte van enkele Egyptenaren uit de oudheid is bekend. Op grond van deze data wil men vaststellen of de gemiddelde schedelgrootte van mensen in het oude Egypte gelijk is aan die van de huidige mens.

Hypothese toetsen: de hypotheses

Def. Bij *hypothese toetsen* wordt een hypothese H_0 getest tegen een hypothese H_a.

H_0 is de *nulhypothese* en H_a is de *alternatieve hypothese*. H_a wordt ook wel H_1 genoemd.

De alternatieve hypothese is meestal de *onderzoekshypothese*, die alleen aangenomen (ondersteund) wordt door de nulhypothese te verwerpen.

Over het algemeen is de nulhypothese de hypothese van *geen verschil* of *geen onderscheid* of *geen relatie*, en de test dient om aan te tonen dat er wel een verschil, onderscheid of relatie is.

Def. De hypotheses die we gaan beschouwen zijn meestal van de vorm:

tweezijdig
$$H_0 : \mu = a$$
$$H_a : \mu \neq a$$

linkszijdig
$$H_0 : \mu \geq a$$
$$H_a : \mu < a$$

rechtszijdig
$$H_0 : \mu \leq a$$
$$H_a : \mu > a$$

Def. H_0 en H_a worden *verworpen* of *aangenomen* (niet verworpen).

Als H_0 aangenomen wordt, wordt H_a verworpen.

Als H_0 verworpen wordt, wordt H_a aangenomen.

Def.

- H_0 is waar en wordt aangenomen: correcte beslissing.
- H_0 is waar en wordt verworpen: fout van de 1^e soort.
- H_a is waar en wordt aangenomen: correcte beslissing.
- H_a is waar en wordt verworpen: fout van de 2^e soort.

Criterium voor het verwerpen van de nulhypothese:

Voor een zekere constante x_k (of x_k^l en x_k^r) wordt op grond van een steekproef met gemiddelde $\overline{X}$

$$\begin{array}{rl} H_0 \text{ verworpen als } \overline{X} \geq x_k^r \text{ of } \overline{X} \leq x_k^l & \text{(tweezijdige toets)} \\ H_0 \text{ verworpen als } \overline{X} \geq x_k & \text{(rechtszijdige toets)} \\ H_0 \text{ verworpen als } \overline{X} \leq x_k & \text{(linkszijdige toets).} \end{array}$$

Def. Het *significantieniveau* is de kans op een fout van de 1^e soort en wordt aangeduid met α.

Het criterium voor het verwerpen van H_0 wordt zo gekozen dat de fout van de 1^e soort het significantieniveau α is:

$$P(\overline{X} \geq x_k^r \text{ of } \overline{X} \leq x_k^l \mid H_0) = \alpha \qquad \text{(tweezijdige toets)}$$

$$P(\overline{X} \geq x_k \mid H_0) = \alpha \qquad \text{(rechtszijdige toets)}$$

$$P(\overline{X} \leq x_k \mid H_0) = \alpha \qquad \text{(linkszijdige toets).}$$

Def. De *kritische waarde* of de *p-waarde (p-value)* is de waarde x_k waarvoor

$$
\begin{array}{ll}
P(\overline{X} \geq x_k^r \text{ of } \overline{X} \leq x_k^l \mid \mu = a) = \alpha & \text{(tweezijdige toets met } H_0 : \mu = a) \\
P(\overline{X} \geq x_k \mid \mu = a) = \alpha & \text{(rechtszijdige toets met } H_0 : \mu \leq a) \\
P(\overline{X} \leq x_k \mid \mu = a) = \alpha & \text{(linkszijdige toets met } H_0 : \mu \geq a).
\end{array}
$$

Het *kritische gebied (region of rejection)* zijn die waardes x die liggen in de intervallen

$$
\begin{array}{ll}
(-\infty, x_k^l] \text{ of } [x_k^r, \infty) & \text{(tweezijdige toets)} \\
[x_k, \infty) & \text{(rechtszijdige toets)} \\
(-\infty, x_k] & \text{(linkszijdige toets).}
\end{array}
$$

Als $\overline{X}$ in the kritisch gebied ligt, dan geldt dat onder de aanname H_0 de kans dat het steekproefgemiddelde gelijk aan $\overline{X}$ is, $\leq \alpha$ is.

Daarom wordt H_0 *verworpen* als $\overline{X}$ in het kritische gebied ligt. Als $\overline{X}$ niet in het kritische gebied ligt wordt H_0 *aangenomen* ofwel *niet verworpen*.

Def. Wanneer het significantieniveau eenmaal gekozen is, kan de kritische waarde berekend worden als de verdeling P van het steekproefgemiddelde $\overline{X}$ bekend is.

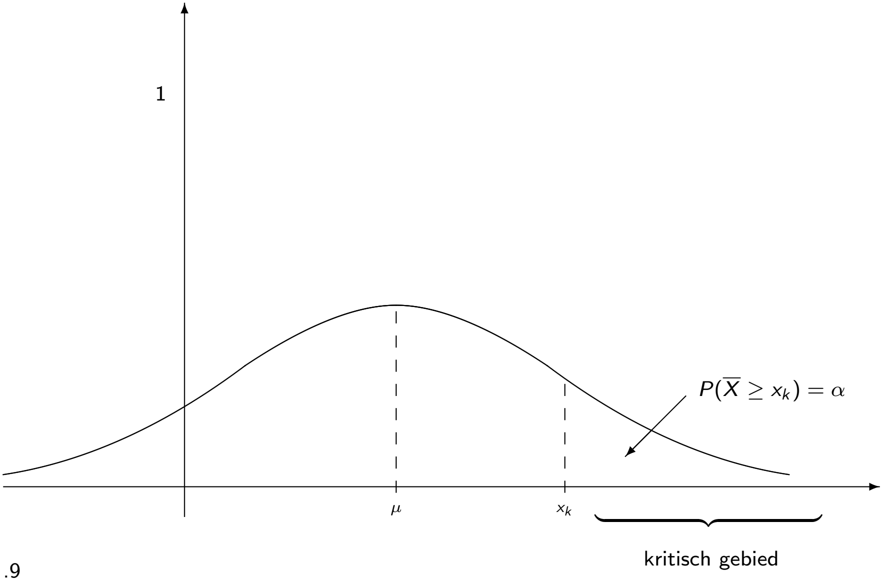
Als de standaardafwijking van de populatie bekend en gelijk aan σ is, dan wordt vaak aangenomen dat P de normale verdeling P_s is met gemiddelde μ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, waarbij n de grootte van de steekproef is.

De Centrale Limietstelling wordt beschouwd als rechtvaardiging voor die keuze.

Als de standaardafwijking van de populatie niet bekend is, dan wordt vaak aangenomen dat P de t-verdeling P_t is bij $n-1$ vrijheidsgraden, met gemiddelde μ en standaardafwijking $\frac{s}{\sqrt{n}}$, waarbij s de standaardafwijking van de steekproef is en n de grootte van de steekproef.

Deze keuze kan gerechtvaardigd worden op dezelfde wijze als voor de normale verdeling.

Bij een rechtszijdige toets:



Vb. Het gemiddelde aantal patiënten dat met 200 mg. van medicijn M geneest van een zekere ziekte is 30%. Men wil testen of een dosis van 300 mg. significant meer patiënten geneest. Men dient aan een steekproef van 25 patiënten 300 mg. M toe, waarvan 40% geneest.

Laat μ het gemiddelde aantal patiënten in de populatie zijn dat bij 300 mg. M geneest. Als significantieniveau wordt 0.05 genomen. Voor het gemak wordt aangenomen dat σ bekend en gelijk aan 4% is.

$$H_0 : \ \mu \leq 30\%$$
$$H_a : \ \mu > 30\%.$$

Fout van de 1^e soort: $\mu = 30\%$, maar H_0 wordt verworpen.

Voor de kritische waarde x_k moet gelden dat

$$P(\overline{X} \geq x_k) = \alpha = 0.05.$$

Aangenomen wordt dat $\overline{X}$ normaal verdeeld is. Dus moet gelden voor x_k:

$$P(\overline{X} \geq x_k) = P_s(\frac{\overline{X} - 30}{\frac{\sigma}{\sqrt{25}}} \geq \frac{x_k - 30}{\frac{\sigma}{\sqrt{25}}}) = P_s(\frac{\overline{X} - 30}{0.8} \geq \frac{x_k - 30}{0.8}) = 0.05.$$

$P_s(z \geq 1.645) = 0.05$. Dus $x_k = 30 + (1.645)(0.8) = \mu + 1.645 \frac{\sigma}{\sqrt{25}} = 31.316\%$.
$\overline{X} = 40\% > 31.316\%$. Dus $\overline{X}$ ligt in the kritische gebied, en H_0 wordt verworpen.
Conclusie: bij een dosis van 300 mg. genezen significant meer patiënten.

Vb. Utrecht wil weten of het actie moet ondernemen aangaande de gemiddelde grootte van studentenkamers en wil daarom een toets laten uitvoeren waarbij wordt bekeken of de gemiddelde kamergrootte significant kleiner is dan 20m^2.

Hypotheses $H_0 : \mu \geq 20\text{m}^2$ en $H_a : \mu < 20\text{m}^2$.

Er een steekproef ter grootte 33 genomen (jullie) en op grond daarvan wordt bepaald welke hypothese verworpen moet worden. Als significantieniveau wordt 0.01 genomen.

Gemiddelde kamergrootte $\overline{X} = 18\text{m}^2$ en standaardafwijking $s = 5.6\text{m}^2$.

Voor de kritische waarde x_k moet gelden:

$$P(\overline{X} \leq x_k) = P_t\left(\frac{\overline{X} - 20}{\frac{5.6}{\sqrt{33}}} \leq \frac{x_k - 20}{\frac{5.6}{\sqrt{33}}}\right) = P_t\left(\frac{\overline{X} - 20}{0.97} \leq \frac{x_k - 20}{0.97}\right) = 0.01.$$

Omdat de variantie van de populatie niet bekend is wordt met de t-verdeling P_t getoetst bij 32 vrijheidsgraden, met gemiddelde 20 en de standaardafwijking van het gemiddelde 0.97. Uit C.3: $P_t(z \leq -2.457) = 0.01$ (bij 30 vrijheidsgraden omdat 32 niet in tabel voorkomt).

Daarmee is de kritische waarde $x_k = 20 + (-2.457)(0.97) = 17.62\text{m}^2$ en het kritische gebied $(-\infty, 17.62]$.

$\overline{X}$ ligt niet in het kritische gebied: H_0 wordt niet verworpen. Dus Utrecht onderneemt (net) geen actie.

Vb. Utrecht overweegt studenten tegemoetkoming in woningkosten te geven en wil daartoe weten of de gemiddelde kamerprijs significant hoger is dan €250.

Hypotheses (in €) $H_0 : \mu \leq 250$ en $H_a : \mu > 250$.

Er een steekproef ter grootte 33 genomen (jullie) en op grond daarvan wordt bepaald welke hypothese verworpen moet worden. Als significantieniveau wordt 0.1 genomen.

Kamerprijs: $\overline{X} =$ €282 en $s =$ €84.

Uit C.3: $P_t(z \geq 1.31) = 0.1$.

Dus geldt voor $x_k = 250 + (1.31)(15) =$ €269.65:

$$P(\overline{X} \geq x_k) = P_t(\frac{\overline{X} - 250}{\frac{84}{\sqrt{33}}} \geq \frac{x_k - 250}{\frac{84}{\sqrt{33}}}) = P_t(\frac{\overline{X} - 250}{15} \geq \frac{x_k - 250}{15}) = 0.1.$$

$\overline{X}$ ligt in het kritische gebied $[269.65, \infty)$: H_0 wordt verworpen. Dus Utrecht onderneemt actie.

Filosofie van de kansrekening

Vraag:

Wat is een kans?

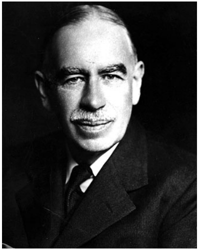
Wat betekent de uitspraak: de kans op A is p?

Wat is de rechtvaardiging voor de axioma's van de kansrekening?

Filosofie: vier theorieën

- Logische theorie
- Subjectieve theorie
- Frequentietheorie
- Propensity theorie

John Maynard Keynes (1883-1946)



Henry Moore: *Principia Ethica*. Regels voor ethisch handelen.

Bertrand Russell en Alfred Whitehead: *Principia Mathematica*. Deductie (logica).

Keynes: *Treatise on Probability*. Inductie (waarschijnlijkheid/kansrekening) .

Waarschijnlijkheid is de mate van *rationeel* geloof. Het is objectief (in de Platonistische zin van het woord).

Het is mogelijk dat er aan de waarschijnlijkheid van zekere gebeurtenissen geen numerieke waarde toe te kennen is.

Frank Plumpton Ramsey (1903-1930)

Bruno de Finetti (1906-1985)

Filosofie: Subjectieve theorie

Waarschijnlijkheid is de mate van *persoonlijk* geloof. Het is subjectief.

De kans die een persoon aan een gebeurtenis toekent wordt vastgesteld door middel van een denkbeeldige weddenschap (volgende slide).

Filosofie: kansen toekennen in de Subjectieve theorie

Def. De kans die een persoon aan een gebeurtenis A toekent is dat wat de persoon als *weddenschapsquotiënt* kiest in de volgende zetting:

Persoon I kiest een getal q, de weddenschapsquotiënt, en een andere persoon, II, kiest vervolgens de inzet z. I betaalt qz aan II, en als A plaatsvindt betaalt II z aan I.

De weddenschapquotiënt q wordt beschouwd als de kans die persoon I aan gebeurtenis A toekent:

$$P_I(A) \equiv_{def} q.$$

Def. De weddenschapsquotiënten van I voor de gebeurtenissen $A_1, \ldots, A_m$ zijn *coherent* als persoon II geen inzetten kan kiezen die hem altijd winst opleveren.

Probleem: Hoe komt men tot overeenstemming aangaande de "objectieve" kansen? Bijvoorbeeld de kans op K bij een (on)zuivere munt?

St. Onder aanname van coherentie zijn in de subjectieve interpretatie de axioma's van de kansrekening waar.

Bew. Alleen het bewijs van het axioma $0 \leq P(A) \leq 1$ wordt hier gegeven.

Als de weddenschapsquotiënt $P_I(A) > 1$, dan zal *II* door $z > 0$ te kiezen altijd winst maken.

En als $P_I(A) < 0$, dan zal *II* door $z < 0$ te kiezen altijd winst maken.

Omdat aangenomen is dat de weddenschapsquotiënten coherent zijn volgt hieruit dat noch $P_I(A) < 0$ noch $P_I(A) > 1$. Dus geldt $0 \leq P(A) \leq 1$.

Finis