Logische Complexiteit

GNFA's en het Pomplemma

College 4

Donderdag 18 Februari

Reguliere talen en reguliere expressies

St. Een taal is regulier desda de taal beschreven wordt door een reguliere expressie.

Reguliere talen en reguliere expressies

St. Een taal is regulier desda de taal beschreven wordt door een reguliere expressie.

Bew.

$\Leftarrow$ done.

$\Rightarrow$: Converteer een DFA M naar een GNFA M^g en de GNFA M^g naar een GNFA G met twee toestanden, zodat $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M^g) = \mathcal{L}(G)$. G geeft de reguliere expressie R zodat $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(R)$. ♡

GNFA's

Def. $\mathcal{R}_\Sigma$ is de verzameling van alle reguliere expressies in de taal Σ.

Def. Een GNFA is $M = (Q, \Sigma, \delta, q_a, q_s)$, waarbij

- Q is een eindige verzameling toestanden,
- Σ is het alfabet,
- $\delta : Q\backslash\{q_a\} \times Q\backslash\{q_s\} \to \mathcal{R}$ is de transitiefunctie,
- q_s is de begintoestand,
- q_a is de accepterende toestand.

M *accepteert* een woord w als er $w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^*$ en toestanden $q_0, \ldots, q_n \in Q$ zijn zodat

- $q_0 = q_a$ en $q_n = q_a$,
- voor elke i, $w_i \in \mathcal{L}(\delta(q_{i-1}, q_i))$, ofwel, als $\delta(q_{i-1}, q_i) = R$, dan $w_i \in \mathcal{L}(R)$.

$G \Rightarrow G^{q_w}$

Def. Voor een DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \mathcal{F})$, is M^g een GNFA, waarbij

- $M^g = (Q \cup \{q_a, q_s\}, \Sigma, \delta', q_s, q_a)$,
- er ϵ-pijlen zijn van q_a naar q_0 en van elke $q \in \mathcal{F}$ naar q_s,
- $\forall q_i, q_j \in Q$ geldt $\delta'(q_i, q_j) = \bigcup\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}$, tenzij
- $q_i = q_j$ en er geen lus bij q_i is, dan $\delta'(q_i, q_i) = \epsilon$.

(Dus als er geen pijlen tussen q_i en q_j zijn, dan $\delta'(q_i, q_j) = \emptyset$.)

Def. Gegeven een GNFA $Q = (Q, \Sigma, \delta, q_s, q_a)$ en een $q_w \in Q$ ongelijk q_s en q_a, is $G^{q_w} = (Q \backslash \{q_w\}, \Sigma, \delta', q_s, q_a)$, waarbij

- $\delta'(q_i, q_j) = \delta(q_i, q_j) \cup \delta(q_i, q_w)\delta(q_w, q_w)^*\delta(q_w, q_j)$.

$$
\begin{tikzcd}
q_i \arrow[rr, "R"] \arrow[dr, "R_i"'] & & q_j \\
& q_w \arrow[ur, "R_j"'] \arrow[loop below, "R_w"] &
\end{tikzcd}
\qquad
q_i \xrightarrow{R \cup R_i R_w^* R_j} q_j
$$

Pomplemma

St. Voor elke reguliere taal $\mathcal{L}$ in alfabet Σ is er een getal $p \in \mathbb{N}$ waarvoor geldt: voor elk woord $s \in \mathcal{L}$ van lengte minstens p zijn er $x, y, z \in \Sigma^*$ zodat

- $s = xyz$,
- voor elke $n \geq 0$: $xy^n z \in \mathcal{L}$,
- y is niet het lege woord ϵ,
- de lengte van xy is hoogstens p.

Finis