Logische Complexiteit

Turing machines

College 8

Donderdag 4 Maart

Recursief opsombare talen

Chomsky-hierarchie	talen	automaten
type-3 talen	reguliere	DFA's en NFA's
type-2 talen	context-vrije	PDA's
type-1 talen	context-sensitieve	...
type-0 talen	recursief opsombare	Turing machines

Gottfried Leibniz (1646-1716): calculus ratiocinator

Alan Turing (1912-1954): turing machine

Turing machines

Def.

Een *Turing machine* (TM) is een 7-tal $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$, waarbij zijn:

Q	de toestanden,
Σ	het input-alfabet dat $\sqcup$ (blank) niet bevat,
Γ	het tape-alfabet, waarbij $\sqcup \in \Gamma$ en $\Sigma \subseteq \Gamma$,
δ	de transitiefucntie, $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$,
q_0	de begintoestand,
q_a	de "accept" toestand,
q_r	de "reject" toestand, waarbij $q_a \neq q_r$.

$\delta(q, x) = (r, y, L)$ betekent dat bij het lezen van x in toestand q, de machine naar toestand r gaat, y print, en 1 stap naar links doet.

Idem voor $\delta(q, x) = (r, y, R)$, waarbij dan 1 stap naar rechts gedaan wordt.

Beslissers

In tegenstelling tot de situatie bij PDA's kan het zo zijn dat een Turing machine op een of andere input niet stopt.

Beslissers doen dat wel:

Def. Een TM is een *beslisser* als de berekening van de machine op elke input eindigt: bij elke input komt de machine uiteindelijk in een accept of een reject toestand.

Configuraties

De configuratie van een TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ representeert 1 stap in een berekening van de machine.

Def. Een *configuratie* van M is een rij wqv, waarbij $w, v \in \Gamma^\star$ en $q \in Q$. Dit representeert dat de machine in toestand q is, het woord wv op de tape staat (gevolgd door blanks), en de kop het symbool meteen rechts van q leest.

Vb. Tijdens een berekening staat in toestand q_7 het woord 4210901 op de tape (gevolgd door $\sqcup$'s) en leest de kop 9. Dit moment in de berekening wordt weergegeven door de configuratie

$$4210q_7901$$

Niet alle configuraties hoeven ook werkelijk voor te komen in een berekening.

Configuraties

Def. Een configuratie is *accepterend* als q_a erin voorkomt. De *start configuratie* van een TM op input w is de configuratie $q_0 w$.

Een configuratie C *leidt tot* (yields) configuratie C' als er woorden w,v, letters of blanks x,y,z en toestanden q,r zijn zodat

$$C = wxqyv \qquad C' = wxzrv \qquad \delta(q, y) = (r, z, R)$$

of

$$C = wxqyv \qquad C' = wrxzv \qquad \delta(q, y) = (r, z, L)$$

De taal van een TM

Def. Een woord w wordt *geaccepteerd* door TM M als er configuraties $C_1, \ldots, C_n$ van M zijn zodat

$C_1 = q_0 w$,

C_i leidt tot C_{i+1},

C_n is een accepterende configuratie.

De *taal* van M of de taal die M *herkent* is

$$\mathcal{L}(M) =_{def} \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ accepteert } w\}.$$

Als M een beslisser is wordt ook wel gezegd dat M de taal $L(M)$ *beslist*.

Recursief opsombare en beslisbare talen

Def. Een taal heet *Turing-herkenbaar* of *recursief opsombaar* (Turing-recognizable, recursively enumerable or r.e.) als het de taal van een of andere TM is.

Def. Een taal heet *Turing-beslisbaar* of *beslisbaar* (Turing-decidable or decidable) als het de taal van een of andere beslisser is.

De Church-Turing these

Intuïtief berekenbaar = berekenbaar door een Turing machine.

Finis