AANVULLENDE TOETS INLEIDING LOGICA VOOR CKI DINSDAG 10 DECEMBER VAN 13:30 TOT 16:30, IN ZAAL 004 VAN DRIFT 13.

ALBERT VISSER EN VINCENT VAN OOSTROM

Zet op elke blad uw naam en studentnummer. Er zijn vijf opgaven. U kunt in het totaal 100 punten halen met de gewone vragen en 110 punten als u de bonusvragen ook maakt. *Geef altijd uitleg.*

1. Vertalingen

Vertaal de onderstaande zinnen zo nauwkeurig mogelijk in de taal van de predikatenlogica. Vergeet de vertaalsleutel niet. Gebruik zo weinig mogelijk predikaatsymbolen. Het discussiedomein is de verzameling bestaande uit Aoname, Tengo, Komatsu, Fuka Eri, Ebisuno-sensei, Fukada, Ayumi, de Weduwe, Ushikawa, de Leider.

(Om verkeerd lezen te voorkomen: het woord 'die' in de volgende zinnen is steeds het onderwerp van de bijzin die ermee begint.)

a. Fukada houdt van Ayumi of Fuka Eri houdt van Tengo of Komatsu. (4 pt)

b. De Leider houdt van zichzelf alleen als de Weduwe niet van zichzelf houdt. (4 pt)

c. Aoname en Tengo houden van elkaar, maar niemand houdt van Ushikawa. (4 pt)

d. Iedereen die van Fuka Eri houdt, houdt ook van een uitgever, tenzij deze uitgever een moordenaar is. (4 pt)

e. Alle onderzoekers zitten achter een moordenares aan die van Tengo houdt, maar die niet van de Leider houdt. (4 pt)

2. Syntax

Zij A de formule $\forall x\,\exists y\,((Rxyz \vee \exists y\,\forall z\,\exists x\,Rxzy) \vee Ryxx)$.

a. Geef de ontleedboom van A met korte labels en de ontleedboom van A met lange labels. (5 pt)

b. Geef de definitie van binding. Illustreer deze definitie door voor ieder voorkomen van x in de gegeven formule A uit te leggen waarom het al dan niet door (het unieke voorkomen van) de $\forall x$ in de formule gebonden wordt (d.w.z. als dat voorkomen van x wel door de $\forall x$ gebonden wordt leg uit waarom wel, en als het niet gebonden wordt door de $\forall x$ leg uit waarom niet). (10 pt)

c. Geef beide voorkomens van $\exists y$ in officiële notatie. (5 pt)

3. Semantiek

a. (propositielogica) Maak een waarheidstafel van de formule $(\neg p_0 \leftrightarrow (p_0 \to \bot))$ en toon zowel door middel van de waarheidstafel als door middel van semantisch redeneren aan dat dit een tautologie is. (7 pt)

b. (propositielogica)

   i. Laat zien dat de verzameling $\{(p_0 \leftrightarrow p_1), (p_0 \leftrightarrow \neg p_1)\}$ strijdig is;

   ii. Laat zien dat de verzameling $\{(p_0 \leftrightarrow p_1), \neg(p_0 \leftrightarrow \neg p_1)\}$ vervulbaar is;

   iii. Is het voor willekeurige formules A en B zo dat de verzameling $\{A, B\}$ strijdig is dan en slechts dan als de verzameling $\{A, \neg B\}$ vervulbaar is? Zo ja, beargumenteer dit. Zo nee, geef formules A en B waarvoor dit niet geldt.

   (6 pt)

c. (predikatenlogica) Bezie de signatuur $\Sigma = \langle \{P\}, \emptyset, \mathsf{ar} \rangle$, waar $\mathsf{ar}(P) = 2$. Zij:

$$A := (\forall x\, \exists y\, Pxy \wedge \exists x\, \forall y\, \neg\, Pyx).$$

   Geef een model $\mathcal{M}$ waarin A waar is en een model $\mathcal{N}$ waarin A onwaar is. Teken pijldiagrammen van deze modellen. Geef een verificatie met behulp van de semantische regels van de waarheid van A in $\mathcal{M}$ en de onwaarheid van A in $\mathcal{N}$. (7 pt)

4. Natuurlijke Deductie

Geef ND bewijzen van de volgende stellingen.

a. (propositielogica) $p_0 \wedge (p_1 \vee p_1) \vdash p_1 \wedge (p_0 \vee p_0)$. (5 pt)

b. (propositielogica) $\vdash (p_0 \leftrightarrow p_1) \to (\neg p_1 \leftrightarrow \neg p_0)$. (5 pt)

c. (predikatenlogica) $\forall x\, (Px \wedge Qx) \vdash \forall x\, Px \wedge \exists x\, Qx$. (5 pt)

d. (predikatenlogica) $\exists x\, \forall y\, (Pxy \vee Qxy) \vdash \forall y\, (\exists x\, Pxy \vee \exists x\, Qxy)$. (5 pt)

Bonus: $\exists x\, Px, \forall x\, (Px \to \exists y\, Qy), \forall x\, (Qx \to Px) \vdash \exists x\, (Px \wedge Qx)$. (5 pt)

5. Gemengd

a. Definieer met behulp van recursie de functie f_0 van de verzameling formules naar de verzameling natuurlijke getallen, die voor een formule A het aantal voorkomens van het propositionele atoom p_0 in A oplevert. Bereken vervolgens, stap voor stap gebruikmakend van de clausules van die definitie, dat:

   i. $f_0(\bot) = 0$;

   ii. $f_0((p_1 \to p_2)) = 0$

   iii. $f_0(((p_0 \vee p_1) \wedge p_0)) = 2$.

   (7 pt)

Bonus: Als het propositionele atoom p_0 niet in een formule A voorkomt dan hangt de valuatie van A niet af van de valuatie van p_0. Preciezer: als $f_0(A) = 0$ (met f_0 als in het vorige onderdeel) en V en V' zijn valuaties die aan alle propositionele atomen anders dan p_0 dezelfde waarheidswaarde toekennen (dus $V(p_i) = V'(p_i)$ voor alle $i > 0$), dan geldt $V(A) = V'(A)$.

Beargumenteer dat het bovenstaande waar is (dat de eigenschap geldt voor alle formules A waarin p_0 niet voorkomt), en illustreer dit aan de hand van een voorbeeld, d.w.z. een formule A en valuaties V en V'. (5 pt)

b. Bereken een disjunctieve normaalvorm van de formule $p_0 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2)$ met behulp van equivalenties (de transformatieregels).

Zoals uit uw berekening zou behoren te blijken, kan het berekenen van een disjunctieve normaalvorm met behulp van de transformatieregels leiden tot een formule die groter is dan de oorspronkelijke formule. Geef een voorbeeld van een formule waarvan het berekenen van de disjunctieve normaalvorm met behulp van de transformatieregels leidt tot een formule die (minimaal) 8 keer zo groot is (in aantal connectieven). (6 pt)

c. Wat is er mis met het volgende 'bewijs' dat pretendeert te laten zien dat $\exists x\, Px \vdash \forall y\, Py$?

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x\, Px$}
\AxiomC{$[Py]^1$}
\RightLabel{$\vee$I}
\UnaryInfC{$Py \vee Py$}
\AxiomC{$[Py]^2$}
\AxiomC{$[Py]^2$}
\RightLabel{$\vee$E, 2}
\TrinaryInfC{Py}
\RightLabel{$\forall$I}
\UnaryInfC{$\forall y\, Py$}
\RightLabel{$\exists$E, 1}
\BinaryInfC{$\forall y\, Py$}
\end{prooftree}$$

(7 pt)