

TOETS INLEIDING LOGICA VOOR CKI
DONDERDAG, 7 NOVEMBER, 2013, 13.30-16.30U,
WENT BLAUW (220)

ALBERT VISSER

Zet op elke blad uw naam en studentnummer. Er zijn vijf opgaven. U kunt in het totaal 100 punten halen met de gewone vragen en 105 punten als u de bonus-vraag ook maakt. *Geef altijd uitleg.*

1. VERTALINGEN

Vertaal de onderstaande zinnen zo nauwkeurig mogelijk in de taal van de predikaatenlogica. Vergeet de vertaalsleutel niet. Gebruik zo weinig mogelijk predikaatsymbolen. Het discussiedomein is de verzameling bestaande uit Jane Rizzoli, Maura Isles, Angela Rizzoli, Vince Korzak, Barry Frost, Frankie Rizzoli, Constance Isles, Paddy Doyle, Tommi Rizzoli. (Om verkeerd lezen te voorkomen: het woord ‘die’ in de volgende zinnen is steeds het onderwerp van de bijzin die ermee begint.)

- a. Angela Rizzoli is de moeder van Jane Rizzoli en van Tommi Rizzoli, maar Constance Isles is niet de moeder van Maura Isles. (2pt)
- b. Elke schurk is vader van een lijkschouwer. (4pt)
- c. Sommige lijkschouwers zijn bevriend met Jane Rizzoli maar zijn niet met iedereen bevriend. (4pt)
- d. Elke detective is bevriend met een lijkschouwer die bevriend is met elke detective. (4pt)
- e. Er is een schurk die elke detective die niet bevriend is met een lijkschouwer haat. (6pt)

2. SYNTAXIS

Zij A de formule $\exists x (Rxx \wedge \neg \forall y \forall z (Qxy \rightarrow \exists x (Qxy \vee Rxz)))$.

- a. Geef de ontledingboom van A met korte labels en de ontledingboom van A met lange labels. (5pt)
- b. Welke kwantorvoorkomens in A binden welke variabelevoorkomens? (5pt)
- c. Geef beide voorkomens van $\exists x$ in officiële notatie. (5pt)
- d. Waarom is het handig om voorkomens in termen van de ontledingboom te definiëren en niet gewoon als, bijvoorbeeld, een plaats in de formule gezien als rijtje symbolen? Dus waarom niet, bijvoorbeeld, het tweede voorkomen van $\exists x$ in $\forall y \exists x (Pxy \wedge \exists x Pyx)$ definiëren als $\langle 10, \exists x \rangle$? (5pt)

3. MODELLEN

Bezie de signatuur $\Sigma = \langle \{P\}, \emptyset, \mathbf{ar} \rangle$, waar $\mathbf{ar}(P) = 2$.

- Zij $A := \forall x (Pxx \rightarrow \exists y (Pxy \wedge \neg Pyx))$. Geef een model $\mathcal{M}$ waarin A waar is en een model $\mathcal{N}$ waarin A onwaar is. Teken pijldiagrammen van deze modellen. Geef een verificatie met behulp van de semantische regels van de waarheid van A in $\mathcal{M}$ en de onwaarheid van A in $\mathcal{N}$. (8pt)
- Zij $B := \exists x \exists y (Pxy \wedge \neg Pyx) \wedge \forall x \forall y (Pxy \rightarrow \exists z (Pxz \wedge Pzy))$. Leg in woorden uit wat B zegt over een model van signatuur Σ . Geef een model van B met zo weinig mogelijk elementen. *U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven.* (6pt)
- Zij $C := \forall x \exists y Pxy \wedge \forall x \forall y \forall z ((Pxy \wedge Pyz) \rightarrow Pxz) \wedge \forall x \neg Pxx$. Laat zien dat C geen eindige modellen heeft. *Het is de bedoeling dat u een informele uitleg geeft. U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven.* (6pt)

4. NATUURLIJKE DEDUCTIE

Geef ND bewijzen van de volgende stellingen.

- $\forall x \forall y (Pxy \wedge Qxy) \vdash \forall x \forall y Pxy \wedge \forall x \forall y Qxy$. (4pt)
- $\forall x (Px \rightarrow (Qx \rightarrow Rx)) \vdash \forall x ((Px \wedge Qx) \rightarrow Rx)$. (4pt)
- $\exists x (Px \vee Qx) \vdash \exists x Px \vee \exists x Qx$. (6pt)
- $\forall x \exists y Pxy \vdash \forall u \exists v \exists w (Puv \wedge Pvw)$. (6pt)
- Bonus:* Laat zien dat $\forall x (Px \rightarrow (Px \vee Qx))$ oneindig veel verschillende bewijzen kan hebben. (5pt)

5. GEMENGD

- Formuleer de correctheidsstelling voor de predikatenlogica. Hoe kun je de correctheidsstelling gebruiken om niet-bewijsbaarheid aan te tonen? (7pt)
- Bewijs dat $\forall x \exists y Pxy \not\vdash \exists x \forall y Pxy$. *U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven.* (6pt)
- Wat is er mis met het volgende ‘bewijs’ dat pretendeert te laten zien dat $\exists x Px \vdash \forall x Px$? (7pt)

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{[Py]^1}{Py} \quad [Py]^1}{Py \wedge Py} \wedge I}{\exists x Px} \quad \frac{Py}{Py} \wedge E}{\frac{Py}{\forall x Px} \exists E, 1} \forall I$$