TOETS INLEIDING LOGICA VOOR CKI DONDERDAG, 7 NOVEMBER, 2013, 13.30-16.30U, WENT BLAUW (220)

ALBERT VISSER

Zet op elke blad uw naam en studentnummer. Er zijn vijf opgaven. U kunt in het totaal 100 punten halen met de gewone vragen en 105 punten als u de bonus-vraag ook maakt. *Geef altijd uitleg.*

1. Vertalingen

Vertaal de onderstaande zinnen zo nauwkeurig mogelijk in de taal van de predikatenlogica. Vergeet de vertaalsleutel niet. Gebruik zo weinig mogelijk predikaatsymbolen. Het discussiedomein is de verzameling bestaande uit Jane Rizzoli, Maura Isles, Angela Rizzoli, Vince Korzak, Barry Frost, Frankie Rizzoli, Constance Isles, Paddy Doyle, Tommi Rizzoli. (Om verkeerd lezen te voorkomen: het woord 'die' in de volgende zinnen is steeds het onderwerp van de bijzin die ermee begint.)

a. Angela Rizzoli is de moeder van Jane Rizzoli en van Tommi Rizzoli, maar Constance Isles is niet de moeder van Maura Isles. (2pt)

b. Elke schurk is vader van een lijkschouwer. (4pt)

c. Sommige lijkschouwers zijn bevriend met Jane Rizzoli maar zijn niet met iedereen bevriend. (4pt)

d. Elke detective is bevriend met een lijkschouwer die bevriend is met elke detective. (4pt)

e. Er is een schurk die elke detective die niet bevriend is met een lijkschouwer haat. (6pt)

Eén van de mogelijke correcte antwoorden op (d) is:

$$(\dagger)\ \ \forall x\,(D(x) \to \exists y\,(L(y) \wedge B(x,y) \wedge \forall z\,(D(z) \to B(y,z)))).$$

Sommige mensen dachten op kwantoren te kunnen besparen door de $\forall x$ en de $\forall z$ samen te voegen. Deze mensen hadden zoiets als:

$$(\ddagger)\ \ \forall x\,(D(x) \to \exists y\,(L(y) \wedge B(x,y) \wedge B(y,x))).$$

De zin ($\ddagger$) is echter waar als er twee detectives d_1 en d_2 zijn en twee lijkschouwers ℓ_1 en ℓ_2 en als d_1 een wederkerige vriendschap heeft met ℓ_1 en d_2 een wederkerige vriendschap heeft met ℓ_2. In deze situatie is het nog steeds mogelijk dat ℓ_1 niet bevriend is met d_2 en dat ℓ_2 niet bevriend is met d_1. Daarmee is ($\dagger$) onwaar. Dit laat zien dat ($\dagger$) en ($\ddagger$) niet logisch equivalent zijn en daarmee dat ze zeker niet hetzelfde betekenen. (We hebben wel dat ($\ddagger$) uit ($\dagger$) volgt.)

2. Syntaxis

Zij A de formule $\exists x\,(Rxz \wedge \neg \forall y\,\forall z\,(Qxy \rightarrow \exists x\,(Qxy \vee Rxz)))$.

a. Geef de ontleedboom van A met korte labels en de ontleedboom van A met lange labels. (5pt)

b. Welke kwantorvoorkomens in A binden welke variabelevoorkomens? (5pt)

c. Geef beide voorkomens van $\exists x$ in officiële notatie. (5pt)

d. Waarom is het handig om voorkomens in termen van de ontleedboom te definiëren en niet gewoon als, bijvoorbeeld, een plaats in de formule gezien als rijtje symbolen? Dus waarom niet, bijvoorbeeld, het tweede voorkomen van $\exists x$ in $\forall y\,\exists x(Pxy \wedge \exists x\,Pyx)$ definiëren als $\langle 10, \exists x\rangle$? (5pt)

De eerste drie items zijn redelijk tot goed gemaakt. Het belangrijkste punt bij (d) vind ik dat je met behulp van de aan de ontleedboom ontleende occurrences *binding* goed kunt beschrijven. Eén student merkte op dat het updaten —bijvoorbeeld bij het vormen van een conjunctie— van de in het dictaat gekozen representaties veel makkelijker is dan bij de andere representatie.[1] Dat is ook een prima antwoord.

3. Modellen

Bezie de signatuur $\Sigma = \langle \{P\}, \emptyset, \mathsf{ar}\rangle$, waar $\mathsf{ar}(P) = 2$.

a. Zij $A := \forall x\,(Pxx \rightarrow \exists y\,(Pxy \wedge \neg\, Pyx))$. Geef een model $\mathcal{M}$ waarin A waar is en een model $\mathcal{N}$ waarin A onwaar is. Teken pijldiagrammen van deze modellen. Geef een verificatie met behulp van de semantische regels van de waarheid van A in $\mathcal{M}$ en de onwaarheid van A in $\mathcal{N}$. (8pt)

b. Zij $B := \exists x\,\exists y\,(Pxy \wedge \neg\, Pyx) \wedge \forall x\,\forall y\,(Pxy \rightarrow \exists z\,(Pxz \wedge Pzy))$. Leg in woorden uit wat B zegt over een model van signatuur Σ. Geef een model van B met zo weinig mogelijk elementen. *U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven.* (6pt)

c. Zij $C := \forall x\,\exists y\,Pxy \wedge \forall x\,\forall y\,\forall z\,((Pxy \wedge Pyz) \rightarrow Pxz) \wedge \forall x\,\neg\, Pxx$. Laat zien dat C geen eindige modellen heeft. *Het is de bedoeling dat u een informele uitleg geeft. U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven.* (6pt)

Ad (a): De eerste stappen moesten als volgt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}, f \models A \quad &\Leftrightarrow \quad \text{voor alle } d \in D,\ \mathcal{M}, f[x:d] \models Pxx \rightarrow \exists y\,(Pxy \wedge \neg\, Pyx)\\
&\Leftrightarrow \quad \text{voor alle } d \in D,\ \mathcal{M}, f[x:d] \not\models Pxx \text{ of } \mathcal{M}, f[x:d] \models \exists y\,(Pxy \wedge \neg\, Pyx)\\
&\Leftrightarrow \quad \ldots
\end{aligned}
$$

[1] In ontleedboom notatie: als $\langle \sigma, a\rangle$ een voorkomen is in B dan is $\langle 1\sigma, a\rangle$ het corresponderende voorkomen in $(A \wedge B)$. In de in de opgave voorgestelde notatie: als $\langle n, a\rangle$ een voorkomen is in B dan is $\langle n + \ell(A) + 2, a\rangle$ het corresponderende voorkomen in $(A \wedge B)$, waar $\ell(A)$ het aantal symbolen in A is.

Veel mensen hadden echter het volgende:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}, f \models A \quad & \Leftrightarrow \quad \text{voor alle } d \in D,\ \mathcal{M}, f[x:d] \models Pxx \to \exists y\,(Pxy \wedge \neg\, Pyx) \\
& \Leftrightarrow \quad \text{voor alle } d \in D,\ \mathcal{M}, f[x:d] \not\models Pxx \text{ of} \\
& \qquad\ \ \text{voor alle } d \in D, \mathcal{M}, f[x:d] \models \exists y\,(Pxy \wedge \neg\, Pyx) \\
& \Leftrightarrow \quad \ldots
\end{aligned}$$

De distributie van de universele kwantor over de disjunctie is echter niet volgens de semantische regels en levert een verkeerd resultaat.

Ad (b): Deze opgave is vaak goed gedaan. Twee fouten kwamen veel voor. (i) Veel mensen zagen het tweede conjunct $\forall x\,\forall y\,(Pxy \to \exists z\,(Pxz \wedge Pzy))$, dat is *dichtheid*, aan voor *transitiviteit*. En (ii): veel mensen dachten dat het voldoende was om voor één transitie een tussenpunt te creëren maar vergaten dat de andere transities ook een tussenpunt nodig hebben. Dus, bijvoorbeeld, $D := \{0, 1, 2\}$ en $I(P) := \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$ werkt niet: we hebben wel 2 als tussenpunt tussen 0 en 1, maar wat zit er tussen 0 en 2 en tussen 2 en 1? Aan de andere kant werkt bijvoorbeeld $D := \{0, 1\}$ en $I(P) := \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$ keurig. Een wiskundig voorbeeld is $\mathbb{Q}$, de structuur van de rationale getallen waar we voor $I(P)$ de gebruikelijke strikte ordening nemen.

Na overleg met Vincent is (c) een bonus opgave geworden. De mooiste manier om (c) te doen is als volgt. Stel C heeft een eindig model met $I(P) = R$. Op grond van het eerste conjunct van C (*progressiviteit*) en het feit dat het domein niet leeg is, hebben we een keten $d_0\ R\ d_1$ en $d_1\ R\ d_2$ en $d_2\ R\ d_2$ en . . . Omdat het domein eindig is moet er een herhaling optreden: voor zekere i en j met $i < j$, moet gelden dat $d_i = d_j$. Uit het tweede conjunct van C (*transitiviteit*) volgt dat d_iRd_j. Maar dan d_iRd_i en dat is in tegenspraak met het derde conjunct van C (*irreflexiviteit*). Eén student had het antwoord in essentie zo opgeschreven. Een aantal anderen had de intuïtie goed.

4. Natuurlijke Deductie

Geef ND bewijzen van de volgende stellingen.

a. $\forall x\,\forall y\,(Pxy \wedge Qxy) \vdash \forall x\,\forall y\,Pxy \wedge \forall x\,\forall y\,Qxy$. (4pt)

b. $\forall x\,(Px \to (Qx \to Rx)) \vdash \forall x\,((Px \wedge Qx) \to Rx)$. (4pt)

c. $\exists x\,(Px \vee Qx) \vdash \exists x\,Px \vee \exists x Qx$. (6pt)

d. $\forall x\,\exists y\,Pxy \vdash \forall u\,\exists v\,\exists w\,(Puv \wedge Pvw)$. (6pt)

e. *Bonus*: Laat zien dat $\forall x\,(Px \to (Px \vee Qx))$ oneindig veel verschillende bewijzen kan hebben. (5pt)

Items (a) en (b) waren door veel mensen goed gemaakt. Bij (c) en (d) kwamen vaak onjuiste $\exists$-eliminaties voor. Bij (d) waren er af en toe zulke creatieve fouten dat ik er bijna punten voor zou hebben gegeven.

5. Gemengd

a. Formuleer de correctheidsstelling voor de predikatenlogica. Hoe kun je de correctheidsstelling gebruiken om niet-bewijsbaarheid aan te tonen? (7pt)

b. Bewijs dat $\forall x\, \exists y\, Pxy \nvdash \exists x\, \forall y\, Pxy$. *U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven.* (6pt)

c. Wat is er mis met het volgende 'bewijs' dat pretendeert te laten zien dat $\exists x\, Px \vdash \forall x\, Px$? (7pt)

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\, Px \qquad \dfrac{\dfrac{[Py]^1 \quad [Py]^1}{Py \wedge Py}\,\wedge\mathrm{I}}{Py}\,\wedge\mathrm{E}}{Py}\,\exists\mathrm{E}, 1}{\forall x\, Px}\,\forall\mathrm{I}$$

Bij (c) is de $\forall$I toch echt goed, omdat de assumptie al boven de toepassing van deze regel geëlimineerd is. Het feit dat de combinatie van $\wedge$I en $\wedge$E overbodig is, oogt weliswaar vreemd, maar het is niet fout. De schuldige is de $\exists$E. De officiële regel ziet er zo uit:

$$\dfrac{\exists x\, A \qquad \begin{array}{c}[A[x := y]] \\ \bigtriangledown \\ C\end{array}}{C}\,\exists\mathrm{E}$$

Hier mag, volgens conditie 4, y niet vrij voorkomen in C. In ons voorbeeld is $A := Px$ en de y in het voorbeeld is de y van de regel. Tenslotte is $C := Py$.