Tussentoets Inleiding Logica voor CKI, 2013–2014

Educatorium Gamma

Maandag 7 oktober, 13:30–16:30

Deze toets is gesloten boek. De toets bestaat uit 5 opgaven. Alle onderdelen tellen even zwaar. (Ook de bonusopgave, maar die hoeft niet gemaakt te worden om een 10 te behalen.) Lees de vragen steeds goed, en formuleer uw antwoord helder (lever geen kladbladen in). Beargumenteer steeds uw antwoord (een simpel 'ja' of 'nee' levert slechts een klein gedeelte van de punten op). Succes!

1. Deze opgave betreft problemen modelleren en oplossen met behulp van propositielogica;

   (a) Vertaal de volgende zinnen geschikt naar propositielogische formules, door eerst geschikte atomaire proposities te geven (de vertaalsleutel).

      i. Ten minste één van Frodo, Gollum, Bilbo en Sméagol heeft de ring.

      ii. Hoogstens één van Frodo, Gollum en Bilbo heeft de ring.

      iii. Als Sméagol de ring niet heeft, dan hebben Frodo en Bilbo de ring ook niet.

      iv. Sméagol heeft de ring dan en slechts dan als Gollum de ring heeft.

   (b) Bepaal de mogelijke combinaties van waarheidswaarden van de atomaire proposities in het bovenstaande, d.w.z. die combinaties die alle zinnen waar maken, op een wijze (uit de propositielogica) naar keuze, en beantwoord de vraag wie de ring heeft.

   (c) Leg uit wat het betekent dat een voegteken waarheidsdefiniet is, en geef zowel een voorbeeld van een Nederlandse zin met een voegteken dat waarheidsdefiniet is, als van zo'n zin waar het voegteken dat niet is.

2. Deze opgave betreft de syntax van propositielogica;

   (a) Geef van ieder van de drie volgende expressies aan of het een formule van de propositielogica (volgens de inductieve definitie van de verzameling **FOR**) betreft of niet.

   $$\neg\neg\neg(\bot \leftrightarrow p_2)$$

   $$:\!-)$$

   $$(p_1 \vee ((p_2 \vee p_3) \wedge p_0))$$

   Zo ja, geef de ontleedboom van de formule, en geef de formule met weglating van zoveel mogelijk haakjes (volgens de voorrangregels). Zo nee, beargumenteer waarom het geen formule betreft.

   (b) Bepaal een disjunctieve normaalvorm van de formule

   $$\neg((p_0 \wedge p_1) \vee (p_2 \wedge p_3))$$

   op een wijze naar keuze.

(c) Geef een recursieve definitie van de functie **f** van de verzameling formules **FOR** van de propositielogica naar de verzameling rijtjes van x'en, die ieder symbool (ook de haakjes) in een formule vervangt door een x;
In het bijzonder

$$\begin{aligned} f(p_2) &= \mathtt{x} \\ f(\bot) &= \mathtt{x} \\ f(\neg\neg\neg p_1) &= \mathtt{xxxx} \\ f((\bot \vee p_0)) &= \mathtt{xxxxx} \end{aligned}$$

Laat m.b.v. stapsgewijze berekeningen zien dat uw functie inderdaad deze uitkomsten heeft op bovenstaande voorbeelden.

3. Deze opgave betreft semantisch redeneren;
Beschouw het volgende redeneerschema dat we **R** zullen noemen:

$$p \wedge (q \vee r), (q \wedge p) \to \bot \;/\; r \to q$$

(a) geef de definitie van wat het betekent dat een redeneerschema geldig is, en bepaal of **R** geldig is met behulp van een waarheidstafel;

(b) bepaal of **R** geldig is met behulp van semantisch redeneren (op een van de twee manieren naar keuze);

(c) laat zien dat de vraag of **R** geldig is, geherformuleerd kan worden als een vraag of een bepaalde formule A vervulbaar is, d.w.z. geef een formule A zodanig dat **R** is geldig dan en slechts als A is vervulbaar. (Het gaat hier slechts om het herformuleren; U mag hier geen gebruikmaken van of **R** al dan niet geldig is).

4. Deze opgave betreft natuurlijke deductie;
(vergeet niet te vermelden hoe uw afleidingsboom antwoord geeft op de vraag)

(a) Laat zien met natuurlijke deductie dat

$$p_0 \wedge p_1, p_2 \wedge \neg p_0 \vdash p_3$$

(b) Laat zien met natuurlijke deductie dat

$$\neg(p_0 \vee p_1) \vdash (\neg p_1 \wedge \neg p_0)$$

(c) Geef twee natuurlijkedeductiebewijzen die aantonen dat

$$\vdash (p_0 \to (\neg p_1 \to (p_1 \to p_0)))$$

5. Deze opgave betreft van alles wat;

(a) Geef van beide van de volgende formules aan of het een tautologie, een contradictie, dan wel een contingente formule betreft.
   i. $((p_0 \to p_0) \to \bot)$;
   ii. $(p_0 \to (p_0 \to \bot))$.

(b) Bepaal of de verzameling

$$\{p, \neg q \vee r, p \vee q, \neg r \vee p\}$$

strijdig is of niet.

(c) Laat zien dat $\nvdash p \wedge \neg p$;

(bonus) Beargumenteer dat de verzameling $\{\bot, \neg\}$ niet functioneel volledig is.