AANVULLENDE TOETS INLEIDING LOGICA VOOR CKI
VRIJDAG, 14 DECEMBER, 2012, 13.30–16.30,
ACHTER DE DOM, ZAAL 202

Zet op elke blad uw naam en studentnummer. Er zijn vijf opgaven. U kunt in het totaal 110 punten behalen (waarvan 10 punten bonus; 100 punten volstaat voor een 10). *Geef altijd uitleg.*

1. Syntaxis Propositielogica

a. Geef van ieder van de drie volgende expressies aan of het een formule van de propositielogica (volgens de inductieve definitie van de verzameling FOR) betreft of niet.

$$\vee$$
$$\neg(p_0 \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2))$$
$$(p_0 \leftrightarrow (p_1 \to (p_2 \wedge \neg\bot)))$$

Zo ja, geef de ontleedboom van de formule, en geef de formule met weglating van zoveel mogelijk haakjes (volgens de voorrangregels). Zo nee, beargumenteer waarom het geen formule betreft. (7 pt)

b. Geef de definitie van wat het betekent dat een propositielogische formule B een disjunctieve normaalvorm van een propositielogische formule A is, geef een voorbeeld van een tautologie (naar keuze) A van de propositielogica en twee (als formule verschillende) disjunctieve normaalvormen B_1 en B_2 van A. (7 pt)

c. Geef een recursieve definitie van de functie f van de verzameling formules FOR van de propositielogica naar naar zichzelf, die (recursief) iedere subformule van de vorm $\neg A$ vervangt door $(A \to \bot)$. Bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} f((\neg p_0 \vee \neg p_1)) &= ((p_0 \to \bot) \vee (p_1 \to \bot)) \\ f((p_0 \to p_0)) &= (p_0 \to p_0) \\ f(\neg\neg(p_0 \vee p_1)) &= (((p_0 \vee p_1) \to \bot) \to \bot). \quad \text{(6 pt)} \end{aligned}$$

d. (bonus) Bewijs dat voor iedere formule A geldt dat A equivalent is aan $f(A)$, voor f als in het vorige onderdeel. (6 pt)

2. Semantiek Propositielogica

a. Toon aan dat $\neg(p_0 \to p_1) \models (p_1 \to p_2)$. U mag dit doen op een manier naar keuze, maar dient wel iedere door u gemaakte stap/gebruikte definitie te geven. (7 pt)

b. Bepaal of de verzameling

$$\{\neg p, \neg q \vee r, p \vee q, \neg r \vee r\}$$

strijdig is of niet. (7 pt)

c. Geef de definitie van *contingentie* van een propositielogische formule, geef een voorbeeld A van een contingente formule, en toon aan (op een wijze naar keuze) dat A inderdaad contingent is volgens de definitie. (6 pt)

3. Vertalingen

Vertaal de onderstaande zinnen zo nauwkeurig mogelijk in de taal van de predikatenlogica. Vergeet de vertaalsleutel niet. Gebruik zo weinig mogelijk predikaatsymbolen. Het discussiedomein is de verzameling bestaande uit de Baratheons, de Greyjoys, de Lannisters, en de Starks. (Om verkeerd lezen te voorkomen: het woord 'die' in de volgende zinnen is steeds het onderwerp van de bijzin die ermee begint.)

a. Cersei Lannister en Ned Stark zoeken Arya Stark. (4pt)

b. Elke Stark haat elke Lannister. (4pt)

c. Iedereen die iemand haat, wordt ook door iemand gehaat. (4pt)

d. Er is iemand die iedereen haat die een Greyjoy zoekt. (4pt)

e. Iedereen, met uitzondering van Cersei Lannister en de Baratheons, zoekt een Greyjoy. (4pt)

f. (bonus) Vertaal de zin bij onderdeel a nu zo nauwkeurig mogelijk in de taal van de *propositie*logica, en verklaar het verschil met uw antwoord bij a. (4 pt)

4. Syntaxis en Semantiek Predikatenlogica

Zij A de formule $\exists x\,(Px \wedge \neg\,\exists y\,Qxy)$.

a. Geef de minimale signatuur Σ van een taal waarin deze formule voorkomt. (2pt)

b. Geef de ontleedboom van A met korte labels en de ontleedboom van A met lange labels. (4pt)

c. Geef alle voorkomens in A van een propositioneel voegteken in officiële notatie. (4pt)

d. Geef zowel een model $\mathcal{M}$ waarin A waar is als een model $\mathcal{N}$ waarin A onwaar is. Verifieer in detail de waarheid van A in $\mathcal{M}$ en de onwaarheid van A in $\mathcal{N}$. (6pt)

e. Stel dat je voor zekere Γ en B moet laten zien dat $\Gamma \nvDash B$. Heb je de *volledigheidsstelling* nodig of de *correctheidsstelling*? Moviveer uw antwoord. (4pt)

5. Natuurlijke Deductie

Geef ND bewijzen van de volgende stellingen.

a. (propositielogica) $\vdash p_0 \leftrightarrow (p_0 \wedge p_0)$. (5 pt)

b. (propositielogica) $\vdash (p_0 \rightarrow p_1) \vee (p_1 \rightarrow p_2)$. (5 pt)

c. (predikatenlogica) $(\exists x\,Px \rightarrow Q) \vdash \forall x\,(Px \rightarrow Q)$. (4pt)

d. (predikatenlogica) $\exists x\,\exists y\,Rxy \vdash \exists u\,\exists v\,(Ruv \vee Suv)$. (6pt)