

TOETS INLEIDING LOGICA VOOR CKI
DONDERDAG, 8 NOVEMBER, 2012, 17.00-20.00,
RUPPERT BLAUW

ALBERT VISSER

Zet op elke blad uw naam en studentnummer. Er zijn vijf opgaven. Je kunt in het totaal 100 punten halen. *Geef altijd uitleg.*

1. VERTALINGEN

Vertaal de onderstaande zinnen zo nauwkeurig mogelijk in de taal van de predikatenlogica. Vergeet de vertaalsleutel niet. Gebruik zo weinig mogelijk predikaatsymbolen. Het discussiedomein is de verzameling bestaande uit Brigitte Nyborg, Katrine Fønsmark, Kasper Juul, Lars Hesseboe, Michael Laugesen en Svend Åge Saltum. (Dit gezelschap bestaat uit politici, spindokters en journalisten.) (Om verkeerd lezen te voorkomen: het woord ‘die’ in de volgende zinnen is steeds het onderwerp van de bijzin die ermee begint.)

- a. Brigitte Nyborg veracht Svend Åge Saltum en Svend Åge Saltum veracht Brigitte Nyborg. (2pt)
- b. Iedereen die Svend Åge Saltum veracht, veracht noch Brigitte Nyborg noch Katrine Fønsmark. (4pt)
- c. Wie iemand veracht, bewondert ook iemand. (4pt)
- d. Elke journalist bewondert Katrine Fønsmark of bewondert niemand. (4pt)
- e. Er is een journalist die elke spindokter die een journalist bewondert veracht. (6pt)

2. SYNTAXIS

Zij A de formule $\forall x (Pxz \rightarrow \exists y \exists z (Qxy \vee \forall x (Qxy \rightarrow Pxz)))$.

- a. Geef de ontledingboom van A met korte labels en de ontledingboom van A met lange labels. (5pt)
- b. Welke kwantorvoorkomens in A binden welke variabelevoorkomens? (5pt)
- c. Geef beide voorkomens van $\forall x$ in officiële notatie. (5pt)
- d. Waarom is het niet voldoende om te zeggen dat een kwantor-voorkomen van $\exists x$ of $\forall x$ een voorkomen van de variabele x bindt in een formule A als er een neerwaards pad is in de ontledingboom van A dat van het kwantor-voorkomen van $\exists x$ of $\forall x$ naar het variabele-voorkomen van x loopt? (5pt)

3. MODELLEN

Bezie de signatuur $\Sigma = \langle \{P, Q\}, \{c\}, \text{ar} \rangle$, waar $\text{ar}(P) = 1$, $\text{ar}(Q) = 2$.

- Zij $A := \forall x (Px \rightarrow \exists y Qxy)$. Geef een model \mathcal{M} waarin A waar is en een model \mathcal{N} waarin A onwaar is. Teken pijldiagrammen van deze modellen.¹ Geef een verificatie met behulp van de semantische regels van de waarheid van A in \mathcal{M} en de onwaarheid van A in \mathcal{N} . (8pt)
- Zij $B := (\exists x Px \wedge \forall x (Px \rightarrow \exists y \exists z \exists w ((Qxy \wedge Qyz) \wedge Qzw)))$. Leg in woorden uit wat B zegt over een model van signatuur Σ . Geef een model van B met zo weinig mogelijk elementen. *U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven.* (6pt)
- Laat zien dat $\exists x (Px \wedge \exists y Qxy) \not\equiv \exists x (Px \wedge (\exists y Qxy \wedge \exists z Qyz))$. *U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven.* (6pt)

4. NATUURLIJKE DEDUCTIE

Geef ND bewijzen van de volgende stellingen.

- $\forall x \forall y Pxy \vdash \forall y \forall x Pxy$. (4pt)
- $\forall x ((Px \vee Qx) \rightarrow Rx) \vdash \forall x (Px \rightarrow Rx)$. (4pt)
- $\forall x (Px \rightarrow Qx) \vdash \exists x Px \rightarrow \exists x Qx$. (6pt)
- $\forall x \exists y (Pxy \vee Qxy) \rightarrow \forall x (\exists y Pxy \vee \exists y Qxy)$. (6pt)

5. GEMENGD

- Formuleer de correctheidsstelling en de volledighedsstelling voor de predikatenlogica. (7pt)
- Bewijs dat $\forall x \exists y Pxy \not\equiv \forall x \forall y Pxy$. *U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven.* (6pt)
- Wat is er mis met het volgende ‘bewijs’ dat pretendeert te laten zien dat $\exists x Qx \vdash \forall y (Py \rightarrow \exists x (Px \wedge Qx))$? (7pt)

$$\frac{\frac{\frac{[Py]^1 \quad [Qy]^2}{Py \wedge Qy} \wedge I}{\exists x (Px \wedge Qx)} \exists I}{(Py \rightarrow \exists x (Px \wedge Qx))} \rightarrow I, 1}{\frac{\exists x Qx \quad \forall y (Py \rightarrow \exists x (Px \wedge Qx))}{\forall y (Py \rightarrow \exists x (Px \wedge Qx))} \forall I}{\forall y (Py \rightarrow \exists x (Px \wedge Qx))} \exists E, 2$$

¹U kunt de elementen van $I(P)$ in het diagram bijvoorbeeld aangeven door ze te omcirkelen.