AANVULLENDE TOETS INLEIDING LOGICA VOOR CKI

DINSDAG 13 DECEMBER 2011, 17.00 – 20.00, DRIFT 25, ZAAL 1.02

LEES DIT EERST:. Zet op elke blad uw naam en collegekaartnummer. De bonusvragen zijn optioneel. Aanbeveling: bewaar de bonusvragen voor het laatst. U kunt in totaal 100 punten halen, voor de niet-bonus vragen. 100 punten betekent een 10 voor deze toets. *Geef altijd uitleg.*

1. Vertalingen

Vertaal de onderstaande zinnen zo nauwkeurig mogelijk in de taal van de predikatenlogica. Het discussiedomein is de verzameling van de nu levende Nederlanders. Gebruik de volgende vertaalsleutel.

Dxy:	x is strikt slimmer dan y	m:	Mark
Bxy:	x is boos op y	p:	Piet Hein

a. Piet Hein is strikt slimmer dan Mark, tenzij Piet Hein boos is op iemand. (5pt)

b. Piet Hein is even slim als Mark. (5pt)

c. Mark is de slimste nu levende Nederlander. (5pt)

d. Iedereen die boos is op iemand is strikt slimmer dan iemand die boos is op Mark. (5pt)

e. De mensen die boos zijn op Mark zijn dezelfde als die slimmer zijn dan Piet Hein. (5pt)

2. Proppotpourri

Beschouw de formule A gegeven door $(p_0 \wedge (p_0 \to p_1)) \wedge (\neg p_0 \vee p_2)$.

a. Geef de ontleedboom van A. (5pt)

b. Geef de waarheidstafel van A. (5pt)

c. Wanneer zeggen we dat een formule in disjunctieve normaalvorm is? Geef een disjunctieve normaalvorm van A. (5pt)

d. Stel we hebben nog een formule B en we willen nagaan of A en B equivalent zijn, waarbij ons alleen een machine ter beschikking staat die kan checken of een formule vervulbaar is of niet. Geef aan hoe u te werk gaat om equivalentie van A en B te checken. Voer dit vervolgens uit in het geval dat B gegeven is door $p_0 \wedge p_1$ en A als boven, met uzelf in de rol van machine (d.w.z. waarbij u zelf bepaalt of een formule vervulbaar is of niet). (5 pt)

e. Wanneer zeggen we dat een verzameling connectieven functioneel volledig is? Stel we hebben een (ternair/drieplaatsig) connectief met de waarheidstafel van

A. Is dat connectief samen met $\bot$ functioneel volledig? (Beargumenteer uw antwoord!) (5 pt)

f. *Bonus:* Geef een inductieve definitie van de verzameling propositielogische formules M als gebruikelijk maar waarin geen (bi)implicaties ($\rightarrow$,$\leftrightarrow$) voorkomen. (M is een deelverzameling van de verzameling FOR van alle formules.) Geef vervolgens een recursieve definitie van de functie mir van M naar M die een gegeven propositielogische formule spiegelt, b.v. $\mathsf{mir}(\neg p_0 \vee (p_1 \wedge p_2)) = ((p_2 \wedge p_1) \vee \neg p_0)$. (5 pt)

3. Modellen

Bezie de signatuur $\Sigma = \langle \{P, Q\}, \emptyset, \mathsf{ar}\rangle$, waar $\mathsf{ar}(P) = 1$, $\mathsf{ar}(Q) = 2$.

a. Geef de definitie van logische equivalentie. (5pt)

b. Zij $A := \forall x\,(Px \vee \exists y\,Qxy)$. Geef een model $\mathcal{M}$ waarin A waar is en een model $\mathcal{N}$ waarin A onwaar is. Teken pijldiagrammen van deze modellen. Geef een verificatie met behulp van de semantische regels van de waarheid van A in $\mathcal{M}$ en de onwaarheid van A in $\mathcal{N}$. (5pt)

c. Laat zien dat: $\forall x\,\exists y\,(Px \vee Qxy) \not\models \exists x\,\forall y\,(Px \vee Qxy)$. U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven. (5pt)

d. Laat zien dat $\exists x\,(Px \vee Qxx)$ logisch equivalent is met $\exists x\,Px \vee \exists x\,Qxx$. Gebruik hierbij modellen. U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven. (5pt)

e. Geef een zin B in de hierboven gegeven signatuur Σ, waarin de identiteit $=$ niet voorkomt, zodat het domein van elk model $\mathcal{M}$ dat B waar maakt tenminste 4 elementen heeft. U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven. (5pt)

4. Natuurlijke Deductie

Geef natuurlijke deductiebewijzen van de volgende stellingen. (Hier gaat het bij (a) en (b) uiteraard om Natuurlijke Deductie voor Propositielogica en in (c) en (d) en (e) om Natuurlijke Deductie voor Predikatenlogica.)

a. $p_0 \vdash \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_0)$. (5 pt)

b. $\vdash ((p_0 \vee p_1) \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2)$. (5 pt)

c. $\exists x\,\exists y\,Pxy \vdash \exists y\,\exists x\,Pxy$. (5pt)

d. $\neg\,\exists y\,(Py \wedge Qy) \vdash \forall y\,(Py \rightarrow \neg\,Qy)$. (5pt)

e. $\forall x\,\neg\,Pxx \vdash \exists x\,\exists y\,(\neg\,Pxy \wedge \neg\,Pyx)$. (5pt)

f. *Bonus:* Maak het volgende 'skelet' af tot een Natuurlijke Deductie bewijs voor Propositielogica door op de puntjes geschikte formules en regels in te vullen, de gegeven vorm en intrekkingen respecterend (één oplossing volstaat). (5 pt)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\ \dots\ ]^1}{\dots}\,\dots \qquad [\ \dots\ ]^2 \qquad \cfrac{[\ \dots\ ]^1 \quad [\ \dots\ ]^2}{\dots}\,\dots}{\dots}\,\dots, 2}{\dots}\,\dots, 1$$