Tussentoets Inleiding Logica voor CKI, 2011–2012

Educatorium Alfa

Dinsdag 11 oktober, 17:00–20:00

Deze toets is gesloten boek. De toets bestaat uit 5 opgaven met ieder 3 onderdelen[1], die alle even zwaar tellen. Lees de vragen steeds goed, en formuleer uw antwoord helder (lever geen kladbladen in). Beargumenteer steeds uw antwoord (een simpel 'ja' of 'nee' levert geen punten op). Succes!

1. Deze som betreft de syntax van propositielogica;

   (a) Geef van ieder van de drie volgende expressies aan of het een formule van de propositielogica betreft of niet, en waarom dat (niet) zo is.

   $$(\bot \wedge (\neg p_0$$

   $$(\bot \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1))$$

   $$((\bot \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1)) \vee p_0)$$

   (b) Geef de ontleedboom, het hoofdconnectief, en het aantal voorkomens van p_0, voor de formule van de propositielogica

   $$((p_0 \wedge (p_0 \vee p_{10})) \to (\neg p_1 \to \bot))$$

   (c) Geef een recursieve definitie van de functie pof van de verzameling formules van de propositielogica naar zichzelf, die voor iedere deelformule de disjunctie van p met die deelformule neemt. Bijvoorbeeld

   $$\begin{aligned} \mathsf{pof}(p_1) &= (p \vee p_1) \\ \mathsf{pof}(\neg p_2) &= (p \vee \neg(p \vee p_2)) \\ \mathsf{pof}((p_1 \wedge \neg p_2)) &= (p \vee ((p \vee p_1) \wedge (p \vee \neg(p \vee p_2)))) \end{aligned}$$

2. Deze som betreft de semantiek van propositielogica en de verbinding met natuurlijke taal;

   (a) Geef een valuatie V zodanig dat

   $$V(((p_0 \wedge (p_0 \vee p_{10})) \to (\neg p_1 \to \bot))) = 1$$

   of, anders gezegd, zodanig dat

   $$V \models ((p_0 \wedge (p_0 \vee p_{10})) \to (\neg p_1 \to \bot))$$

   en reken dit ook uit, ofwel via de algebraïsche recursieve definitie voor het uitrekenen van een valuatie V, ofwel via de definitie voor het waar maken door een wereld V van een formule, en geef aan welke van deze twee methoden u gebruikt (u moet kiezen; u mag ze niet 'mengen').

   (b) Geef een Nederlandse zin die een niet-waarheidsdefiniet connectief bevat, en leg uit waarom dat connectief niet waarheidsdefiniet is.

[1] Dat komt neer op 15 onderdelen, dus u heeft 12 minuten per onderdeel, gemiddeld.

(c) Bepaal met behulp van een waarheidstafel of

$$(((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow p_0) \rightarrow p_0)$$

een tautologie is of niet.

3. Deze opgave betreft semantische redeneren;

(a) Bepaal of de verzameling

$$\{\neg(p \rightarrow q), \neg(q \rightarrow p)\}$$

strijdig is of niet.

(b) Bepaal of

$$p, (p \leftrightarrow q), ((q \vee r) \wedge (r \rightarrow \neg q)) \not\models r$$

(c) Bepaal of, voor alle formules A, B, geldt

$$(\neg A \vee B), A \models B$$

4. Deze opgave betreft natuurlijke deductie;

(a) Laat zien met natuurlijke deductie dat

$$\vdash \neg\bot$$

(b) Laat zien met natuurlijke deductie dat

$$\vdash (((p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow (p_0 \rightarrow p_2)))$$

(c) Laat zien met natuurlijke deductie dat

$$\vdash (((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow p_0) \rightarrow p_0)$$

Hint: RAA is hierbij nodig.

5. Deze opgave betreft een potpourri.

(a) Beschouw de volgende waarheidstafel van een ternair (drieplaatsig) connectief even

p_0	p_1	p_2	$\mathsf{even}(p_0, p_1, p_2)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Geef een formule in disjunctieve normaalvorm die met even correspondeert in de zin dat hij dezelfde waarheidstafel als even heeft.

(b) Stel we hebben een programma dat kan bepalen of een (één) formule vervulbaar (satisfiable) is of niet. Zouden we dit programma (eenmaal) kunnen gebruiken om een antwoord op Opgave 3a te geven, d.w.z. om te bepalen of de verzameling

$$\{\neg(p \rightarrow q), \neg(q \rightarrow p)\}$$

strijdig is of niet. Zo nee, beargumenteer waarom dat niet kan. Zo ja, geef aan hoe dat kan, met rechtvaardiging van de stappen (u hoeft slechts de methode aan te geven, niet het antwoord voor dit specifieke geval te geven).

(c) Stel er is gevraagd aan te tonen dat A geen semantisch gevolg van de verzameling Γ is, d.w.z. dat $\Gamma \not\models A$. Kan deze vraag, in het algemeen, beantwoord worden door na te gaan dat $\Gamma \models \neg A$? Zo ja, toon aan dat beide uitkomsten altijd hetzelfde zijn, d.w.z. voor alle verzamelingen Γ en voor alle A. Zo nee, geef een verzameling Γ en een formule A waarvoor de uitkomsten op beide verschillen.