# Tussentoets Inleiding Logica voor CKI, 2011–2012

Educatorium Alfa

Dinsdag 11 oktober, 17:00–20:00
Uitwerking van Zaterdag 15 oktober
(eerste versie, correcties/vragen/opmerkingen welkom)

Deze toets is gesloten boek. De toets bestaat uit 5 opgaven met ieder 3 onderdelen[1], die alle even zwaar tellen. Lees de vragen steeds goed, en formuleer uw antwoord helder (lever geen kladbladen in). Beargumenteer steeds uw antwoord (een simpel 'ja' of 'nee' levert geen punten op). Succes!

1. Deze som betreft de syntax van propositielogica;

   (a) Geef van ieder van de drie volgende expressies aan of het een formule van de propositielogica betreft of niet, en waarom dat (niet) zo is.

   We recapituleren[2] de inductieve definitie van de verzameling $\mathsf{FOR}$van formules van de propositielogica.

   i. $p_i$ is een element van $\mathsf{FOR}$, met $i = 0, 1, \ldots$;
   ii. $\perp$ is een element van $\mathsf{FOR}$;
   iii. als $A$ een element van $\mathsf{FOR}$is, dan ook $\not A$;
   iv. als $A$, $B$ elementen van $\mathsf{FOR}$zijn, dan ook $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$.

   $$(\perp \wedge (\neg p_0$$

   Deze is geen formule. Dit kan op verscheidene manieren ingezien worden, bijvoorbeeld de volgende twee:

   - als zij een formule zou zijn, dan zou ze geconstrueerd kunnen worden met behulp van de clausules in de inductieve definitie van $\mathsf{FOR}$. wat zou de laatst toegepaste clausule in deze constructie kunnen zijn? zeker niet clausule 1(a)i want de expressie is niet $\perp$ (zij bevat wel een $\perp$ maar nog veel meer). idem voor clausule 1(a)ii: de expressie is niet een enkele propositievariabele. clausule 1(a)iii kan het niet geweest zijn want de expressie begint niet met een $\neg$. ten slotte kan clausule 1(a)iv het ook niet geweest zijn want dan zou de expressie ook een rechter haakje, ), dienen te bevatten en dat doet zij niet;
   - alle elementen van $\mathsf{FOR}$hebben evenveel linker als rechterhaakjes, maar deze expressie niet (2 versus 0).

   $$(\perp \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1))$$

   Deze is wel een formule. Dit kan op verscheidene manieren aangetoond worden. We er weer twee.

   - om aan te tonen dat zij een formule is, volstaat het om aan te tonen dat ze geconstrueerd kan worden met behulp van de clausules in de inductieve definitie van $\mathsf{FOR}$.

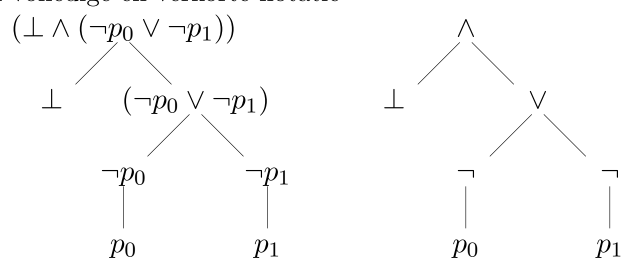
     1. $\perp$ is een formule op basis van clausule 1(a)ii;

[1] Dat komt neer op 15 onderdelen, dus u heeft 12 minuten per onderdeel, gemiddeld.

[2] [1, hoofdstuk 4,definitie 2.1]

2. $p_0$ is een formule op basis van clausule 1(a)i;
3. $\neg p_0$ is een formule op basis van 1(a)2 en clausule 1(a)iii;
4. $p_1$ is een formule op basis van clausule 1(a)i;
5. $\neg p_1$ is een formule op basis van 1(a)4 en clausule 1(a)iii;
6. $(\neg p_0 \vee \neg p_1)$ is een formule op basis van 1(a)3 en 1(a)5 en clausule 1(a)iv;
7. $(\bot \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1))$ is een formule op basis van 1(a)1 en 1(a)6.

- het volstaat ook om een ontleedboom te geven met deze expressie aan de wortel. hier is hij, in volledige en verkorte notatie



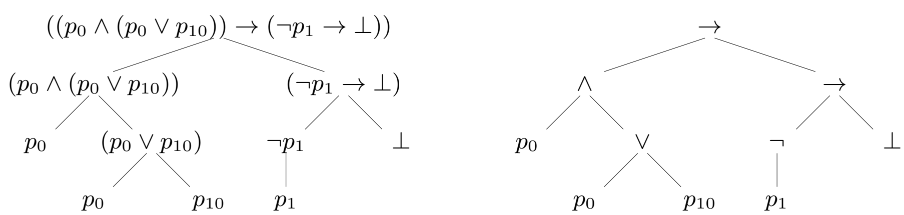

$((\bot \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1)) \vee p_0)$

Deze is ook een formule. Uit het bovenstaande weten we al dat $p_0$ en $(\bot \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1))$ formules zijn. Dus volgt met clausule 1(a)iv dat $((\bot \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1)) \vee p_0)$ ook een formule is.

(b) Geef de ontleedboom, het hoofdconnectief, en het aantal voorkomens van $p_0$, voor de formule van de propositielogica

$((p_0 \wedge (p_0 \vee p_{10})) \to (\neg p_1 \to \bot))$

De ontleedboom in gewone en verkorte notatie is




Het hoofdconnectief is het connectief aan de wortel van de (verkorte) ontleedboom, dus $\to$, en $p_0$ komt 2 keer voor.

(c) Geef een recursieve definitie van de functie $\mathsf{pof}$ van de verzameling formules van de propositielogica naar zichzelf, die voor iedere deelformule de disjunctie van $p$ met die deelformule neemt. Bijvoorbeeld

$$\begin{aligned}\mathsf{pof}(p_1) &= (p \vee p_1)\\ \mathsf{pof}(\neg p_2) &= (p \vee \neg(p \vee p_2))\\ \mathsf{pof}((p_1 \wedge \neg p_2)) &= (p \vee ((p \vee p_1) \wedge (p \vee \neg(p \vee p_2))))\end{aligned}$$

Een recursieve definitie volgt de inductieve structuur van de verzameling $\mathsf{FOR}$van formules.

i. $\mathsf{pof}(p_i) := (p \vee p_i)$, voor alle $i$;
ii. $\mathsf{pof}(\bot) := (p \vee \bot)$;
iii. $\mathsf{pof}(\neg A) := (p \vee \neg \mathsf{pof}(A))$;
iv. $\mathsf{pof}((A \Box B)) := (p \vee (\mathsf{pof}(A) \Box \mathsf{pof}(B)))$, voor $\Box$ een van $\vee$,$\wedge$,$\to$,$\leftrightarrow$.

bijvoorbeeld $\mathsf{pof}(\neg p_2) = (p \vee \mathsf{pof}(p_2)) = (p \vee \neg(p \vee p_2))$.

2. Deze som betreft de semantiek van propositielogica en de verbinding met natuurlijke taal;

   (a) Geef een valuatie $V$ zodanig dat

   $$V(((p_0 \wedge (p_0 \vee p_{10})) \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow \bot))) = 1$$

   of, anders gezegd, zodanig dat

   $$V \models ((p_0 \wedge (p_0 \vee p_{10})) \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow \bot))$$

   en reken dit ook uit, ofwel via de algebraïsche recursieve definitie voor het uitrekenen van een valuatie $V$, ofwel via de definitie voor het waar maken door een wereld $V$ van een formule, en geef aan welke van deze twee methoden u gebruikt (u moet kiezen; u mag ze niet 'mengen').

   Kijkend naar de formule $((p_0 \wedge (p_0 \vee p_{10})) \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow \bot))$ zien we dat het hoofdconnectief een implicatie $\rightarrow$ is. Om een implicatie waar te maken kunnen we ofwel z'n antecedent $(p_0 \wedge (p_0 \vee p_{10}))$ onwaar maken, ofwel z'n consequent $(\neg p_1 \rightarrow \bot)$. Laten we bijvoorbeeld (omdat hij kleiner is) proberen het consequent waar te maken. Omdat ook $(\neg p_1 \rightarrow \bot)$ een implicatie is kunnen we om hem waar te maken weer ofwel z'n antecendent $\neg p_1$ onwaar maken, ofwel z'n consequent $\bot$ waar maken. Dat laatste gaat zeker niet lukken, maar het eerste wel, namelijk als we $p_1$ waar maken, dan is $\neg p_1$ onwaar. Op basis van deze redenering concluderen we dat het zou moeten volstaan om een valuatie $V$ zodanig dat $V(p_1) := 1$ (er zijn wellicht nog vele andere mogelijkheden maar dat was de vraag niet). Laten we narekenen dat de redenering juist was (en dus dat de waarheidswaarden voor de andere propositionele variabelen er kennelijk niet toe doen). We doen dit voor beide methoden.

   - Laten we het eerst via de algebraïsche recursieve definitie[3] doen:

     $$\begin{array}{rl} \multicolumn{2}{l}{V(((p_0 \wedge (p_0 \vee p_{10})) \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow \bot)))} \\ = & \max(1 - V((p_0 \wedge (p_0 \vee p_{10}))), V((\neg p_1 \rightarrow \bot))) \\ = & \max(\ldots, \max(1 - V(\neg p_1), V(\bot))) \\ = & \max(\ldots, \max(1 - (1 - V(p_1)), \ldots)) \\ = & \max(\ldots, \max(1 - (1 - 1), \ldots)) \\ = & \max(\ldots, \max(1, \ldots)) \\ = & \max(\ldots, 1)) \\ = & 1 \end{array}$$

     waarbij we steeds delen waarvan de exacte waarde (0 of 1) niet relevant zal zijn in de rest van de berekening door puntjes hebben vervangen, voor de over/inzichtelijkheid.

   - Laten we het nu narekenen volgens de definitie voor het waar maken door een wereld $V$ van een formule[4]:
     - $V \models ((p_0 \wedge (p_0 \vee p_{10})) \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow \bot))$
     - als (sem$\rightarrow$) $V \models (\neg p_1 \rightarrow \bot))$
     - als (sem$\rightarrow$) niet $V \models \neg p_1$
     - als (sem$\neg$) niet(niet $V \models p_1$)), d.w.z. als $V \models p_1$
     - als $V(p) = 1$, en dat is zo.

     waarbij we steeds alleen maar de 'als' van de 'desda' in de definitie van $\models$ gebruikt hebben, wat volstaat om de vraag te beantwoorden, d.w.z. om voor een wereld na te rekenen dat de formule waar is in die wereld.

[3] [1, hoofdstuk 7, definitie 1.1]

[4] [1, hoofdstuk 7, definitie 2.1].

(b) Geef een Nederlandse zin die een niet-waarheidsdefiniet connectief bevat, en leg uit waarom dat connectief niet waarheidsdefiniet is.

Een connectief is waarheidsdefiniet als de (on)waarheid van een met dat connectief samengestelde zin alleen afhangt van de (on)waarheid van de samenstellende delen. Het connectief 'omdat' is niet waarheidsdefiniet, wat ingezien kan worden door naar de waarheid van de zin 'ik word nat omdat het regent' te kijken. De (on)waarheid van de zin hangt niet slechts af van de (on)waarheid van de samenstellende delen 'ik word nat' en 'het regent'. Dit is bijvoorbeeld in te zien door je twee situaties voor te stellen waarin beide delen waar zijn: een waarin je buiten in de regen loopt, en een waarin je onder de douche staat terwijl het regent. In het eerste geval is de zin waar, maar in het tweede geval niet.[5]

(c) Bepaal met behulp van een waarheidstafel of

$$(((p_0 \to p_1) \to p_0) \to p_0)$$

een tautologie is of niet.

We geven eerst de waarheidstafel

| $p_0$ | $p_1$ | $(((p_0$ | $\to$ | $p_1)$ | $\to$ | $p_0)$ | $\to$ | $p_0)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Omdat de waarheidswaarde van de formule (onder het hoofdconnectief, de een na laatste kolom van de tafel) 1 is voor alle mogelijke waarheidswaarden van de propositionele variabelen ($p_0$ en $p_1$) (voor iedere rij) 1 die in de formule voorkomen, is de formule een tautolgie.[6]

3. Deze opgave betreft semantische redeneren;

(a) Bepaal of de verzameling

$$\{\neg(p \to q), \neg(q \to p)\}$$

strijdig is of niet.

Dat de verzameling strijdig is betekent dat er geen valuatie $V$ is die alle formules in de verzameling waar maakt, anders gezegd dat iedere valuatie die alle formules in de verzameling waar zou maken ook falsum waar zou maken, d.w.z. $\neg(p \to q), \neg(q \to p)\} \models \bot$ Dit kan op meerdere manieren aangepakt worden, b.v. met een waarheidstafel.

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\to$ | $q)$ | , | $\neg$ | $(q$ | $\to$ | $p)$ | $\models$ | $\bot$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | 0 | 0 | 1 | 0 | | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 0 | 0 | | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 1 | 1 | | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | | 0 | 1 | 1 | 1 | | 0 |

Omdat voor alle rijen waar beide formules waar zijn (te zien aan de twee $\neg$-kolommen), namelijk geen enkele, ook $\bot$ waar is, volgt strijdigheid.[7]

[5] Precies dit voorbeeld is op het hoorcollege behandeld.

[6] Deze tautologie staat bekend als Peirce's law.

[7] Een van de paradoxen van (materiële) implicatie is dat voor ieder willekeurig tweetal proposities $A$ en $B$, of $A$ door $B$ geïmpliceerd wordt, of andersom (of beide). Anders gezegd, $(A \to B) \vee (B \to A)$ is een tautologie. In het bijzonder geldt dit dus als we bijvoorbeeld voor $A$ 'de maan is van blauwe kaas' nemen en voor $B$ 'het regent'. Dit maakt duidelijk dat (materiële) implicatie niets met causaliteit van doen heeft; de twee proposities zijn duidelijk niet causaal gerelateerd. Op basis hiervan is direct duidelijk dat $\{\neg(p \to q), \neg(q \to p)\}$ een strijdige verzameling moet zijn.

(b) Bepaal of

$$p, (p \leftrightarrow q), ((q \vee r) \wedge (r \to \neg q)) \not\models r$$

Laten we deze vraag voor de verandering niet met een waarheidstafel maar met behulp van het construeren van een tegenmodel oplossen. We zoeken een valuatie $V$ die ieder van de formules in $\{p, (p \leftrightarrow q), ((q \vee r) \wedge (r \to \neg q))\}$ waar maakt, maar $r$ onwaar maakt. Duidelijk is dat we geen andere keus hebben dan $V(p) := 1$ en $V(r) := 0$. Met (sem$\leftrightarrow$) $V \models (p \leftrightarrow q)$ desda ($V \models p$ en $V \models q$) of ($V \not\models p$ en $V \not\models q$) volgt uit $V \models p$ dat ook $V \models q$, dus $V(q) := 1$. Blijft nog over te controleren dat $V \models ((q \vee r) \wedge (r \to \neg q))$, dus met (sem$\wedge$) dat $V \models (q \vee r)$ en $V \models (r \to \neg q)$. De eerst volgt met (sem$\vee$) uit $V \models q$ en de tweede volgt met (sem$\to$) uit $V \not\models r$. [8]

(c) Bepaal of, voor alle formules $A, B$, geldt

$$(\neg A \vee B), A \models B$$

Ook deze vraag zou weer met een waarheidstafel of de definitie van semantisch gevolg volgend opgelost kunnen worden, maar voor de variatie lossen we hem op met behulp van de volledigheidsstelling. Die zegt dat het equivalent is om te bepalen of voor alle formules $A, B$ geldt

$$(\neg A \vee B), A \vdash B$$

dus of $B$ met natuurlijke deductie afleidbaar is uit de aannames $(\neg A \vee B)$ en $A$. Dat is zo, want we kunnen de volgende afleidingsboom geven, voor alle $A$ en $B$:

$$\dfrac{(\neg A \vee B) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A]^1 \quad A}{\bot}\,\neg E}{B}\,\bot E \qquad [B]^1}{B}\,\vee E^1$$

Dit is een correcte afleidingsboom volgens de natuurlijke deductieregels,[9] met conclusie $B$ en (niet ingetrokken) aannames $(\neg A \vee B)$ en $A$, dus $(\neg A \vee B), A \vdash B$. Uit correctheid van natuurlijke deductie volgt $(\neg A \vee B), A \models B$.

4. Deze opgave betreft natuurlijke deductie;

(a) Laat zien met natuurlijke deductie dat

$$\vdash \neg\bot$$

Er moet een natuurlijke deductie bewijs gegeven worden van $\neg\bot$, zonder gebruik te maken van (niet ingetrokken) verdere aannames. Omdat het hoofdconnectief van de formule een negatie is, proberen we het met de $\neg I$ regel. Om die toe te kunnen passen moeten we onder de extra aanname $\bot$, de formule zonder negatie, $\bot$, kunnen afleiden. Dat is triviaal, dus krijgen we de volgende afleidingsboom.[10]

$$\dfrac{[\bot]^1}{\neg\bot}\,\neg I^1$$

(b) Laat zien met natuurlijke deductie dat

$$\vdash (((p_0 \wedge p_1) \to p_2) \to (p_1 \to (p_0 \to p_2)))$$

Er moet een natuurlijke deductie bewijs gegeven worden van $(((p_0 \wedge p_1) \to p_2) \to (p_1 \to (p_0 \to p_2)))$ zonder gebruik te maken van (niet ingetrokken) verdere aannames. Omdat

[8] Als we bedenken dat $((q \vee r) \wedge (r \to \neg q))$ equivalent is aan $(q \leftrightarrow \neg r)$ dan kunnen we direct zien dat om de verzameling $\{p, (p \leftrightarrow q), (q \leftarrow \neg r)\}$ waar te maken het noodzakelijk is dat $r$ niet waar is, immers, $p$ moet waar zijn, $q$ moet equivalent met $p$ zijn, en op zijn beurt moet $\neg r$ equivalent met $q$ zijn, dus $r$ kan niet waar zijn.

[9] [1, hoofdstuk 9]

[10] Precies deze afleidingsboom is op hoorcollege behandeld en werd ook als huiswerkopgave gevraagd.

het hoofdconnectief van de formule een implicatie is, proberen we het met $\to I$ regel. Om die toe te kunnen passen moeten we onder de extra aanname $((p_0 \wedge p_1) \to p_2)$, tot de conclusie $(p_1 \to (p_0 \to p_2))$ kunnen komen. Aangezien het hoofdconnectief van de conclusie weer een implicatie kunnen we dit herhalen, en dan nog een keer, wat ertoe leidt dat we onder de aannames $((p_0 \wedge p_1) \to p_2)$, $p_1$ en $p_0$ tot de conclusie $p_2$ moeten kunnen komen. We wilen graag de conclusie $p_2$ van de eerste aanname gebruiken, want dan zijn we klaar, maar om die te kunnen gebruiken, d.m.v. $\to E$, moeten eerst $(p_0 \wedge p_1)$ bewijzen. Maar dat volgt uit de aannames $p_1$ en $p_0$ m.b.v. $\wedge I$. De afleidingsboom bij de bovenstaande tekst construerend geeft

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p_0]^2[p_1]^3}{p_0 \wedge p_1}\wedge I \qquad [((p_0 \wedge p_1) \to p_2)]^1}{p_2}\to E}{(p_0 \to p_2)}\to I^3}{(p_1 \to (p_0 \to p_2))}\to I^2}{(((p_0 \wedge p_1) \to p_2) \to (p_1 \to (p_0 \to p_2)))}\to I^1$$

(c) Laat zien met natuurlijke deductie dat

$$\vdash (((p_0 \to p_1) \to p_0) \to p_0)$$

Hint: RAA is hierbij nodig.

Omdat het hoofdconnectief van de formule een implicatie is, is het eerste idee om hem te bewijzen met implicatie introductie. Dat resulteert in een conclusie $p_0$ die we kunnen/moeten afleiden onder de extra aannames $(((p_0 \to p_1) \to p_0)$. Nu kunnen we niet verder: de conclusie heeft geen hoofdconnectief en het hoofdconnectief van de aanname, een implicatie, kunnen we niet elimineren zonder een extra aanname; we gebruiken RAA om zo'n extra aanname te introduceren. Maar hoe komen we aan een geschikte aanname, eentje die tot een tegenspraak leidt? Semantisch kijkend naar de formule zien we dat $\neg p_0$ in die zin geschikt is, want de verzameling $\{(((p_0 \to p_1) \to p_0)), \neg p_0\}$ is strijdig. Dus laten we die gokken en kijken of we de tegenspraak ook kunnen afleiden.

Uit de aanname $\neg p_0$ volgt $(p_0 \to p_1)$, en dus met implicatie eliminatie voor $(((p_0 \to p_1) \to p_0)$ ook $p_0$, wat in tegenspraak is met $\neg p_0$, zoals gewenst, dus hebben we onder intrekking van de gegokte aanname $\neg p_0$ een bewijs van $\bot$.

Omdat we uit $\bot$ alles kunnen afleiden en in het bijzonder $p_0$ volgt dus ten slotte dat $(((p_0 \to p_1) \to p_0) \vdash p_0$.

In een afleidingsboom:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p_0]^3[\neg p_0]^2}{\bot}\neg E}{p_1}\bot E}{(p_0 \to p_1)}\to I^3 \qquad [((p_0 \to p_1) \to p_0]^1}{p_0}\to E \qquad [\neg p_0]^2}{\bot}\neg E}{p_0}RAA^2}{(((p_0 \to p_1) \to p_0) \to p_0)}\to I^1$$

Omdat dit een correcte afleidingsboom zonder (niet ingetrokken) aannames met conclusie $(((p_0 \to p_1) \to p_0) \to p_0)$ is, volgt $\vdash (((p_0 \to p_1) \to p_0) \to p_0)$.[11]

[11] In opgave 2c hadden we al gezien dat dit een tautologie was, Peirce's law, dus weten we met de volledigheids-

5. Deze opgave betreft een potpourri.

(a) Beschouw de volgende waarheidstafel van een ternair (drieplaatsig) connectief $\mathsf{even}$

| $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ | $\mathsf{even}(p_0, p_1, p_2)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Geef een formule in disjunctieve normaalvorm die met $\mathsf{even}$ correspondeert in de zin dat hij dezelfde waarheidstafel als $\mathsf{even}$ heeft.

De formule kan worden geconstrueerd door voor iedere rij van de waarheidstafel met waarheidswaarde 1, de conjunctie van de corresponderende literals (propositievariabelen of negaties daarvan) te nemen, en vervolgens de disjunctie van deze conjuncties

$$(\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2)$$

Dit is een formule in disjunctieve normaalvorm: het is een disjunctie van conjuncties van literals. Verder heeft hij dezelfde waarheidstafel als $\mathsf{even}$, immers we hebben precies opgesomd (opgedisjunct?) onder welke condities de laatste waar is.

(b) Stel we hebben een programma dat kan bepalen of een (één) formule vervulbaar (satisfiable) is of niet. Zouden we dit programma (eenmaal) kunnen gebruiken om een antwoord op Opgave 3a te geven, d.w.z. om te bepalen of de verzameling

$$\{\neg(p \to q), \neg(q \to p)\}$$

strijdig is of niet. Zo nee, beargumenteer waarom dat niet kan. Zo ja, geef aan hoe dat kan, met rechtvaardiging van de stappen (u hoeft slechts de methode aan te geven, niet het antwoord voor dit specifieke geval te geven).

Ja, dit kan. Een verzameling is strijdig als de formules in de verzameling niet tegelijk waar gemaakt kunnen worden. Dat is hetzelfde is als dat hun conjunctie $(\neg(p \to q) \wedge \neg(q \to p))$ niet waar gemaakt kan worden.[12] Dat is hetzelfde als dat die conjunctie niet vervulbaar is. Dus we geven als antwoord strijdig dan en slechts dan als het programma voor de conjunctie niet vervulbaar als antwoord geeft.

(c) Stel er is gevraagd aan te tonen dat $A$ geen semantisch gevolg van de verzameling $\Gamma$ is, d.w.z. dat $\Gamma \not\models A$. Kan deze vraag, in het algemeen, beantwoord worden door na te gaan dat $\Gamma \models \neg A$? Zo ja, toon aan dat beide uitkomsten altijd hetzelfde zijn, d.w.z. voor alle verzamelingen $\Gamma$ en voor alle $A$. Zo nee, geef een verzameling $\Gamma$ en een formule $A$ waarvoor de uitkomsten op beide verschillen.

Nee, in het algemeen verschillen $\Gamma \not\models A$ en $\Gamma \models \neg A$ van elkaar. Neem bijvoorbeeld $\Gamma$ de lege verzameling en $A := p_0$.

stelling zeker dat de formule ook afleidbaar is met natuurlijke deductie.

De gegeven afleiding is slechts een van de vele mogelijke natuurlijke deductie afleidingen. Zo is bijvoorbeeld een bewijs gebaseerd op de waarheidstafel ook altijd mogelijk. Schets: In het bijzonder kunnen we eerst (met RAA) laten zien dat er voor $p_0$ en $p_1$ vier mogelijke valuaties zijn, dat wil zeggen, we kunnen laten zien dat $\vdash (\neg p_0 \wedge \neg p_1) \vee (\neg p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge \neg p_1) \vee (p_0 \wedge p_1)$, wat correspondeert met de rijen van de waarheidstafel. Vervolgens kun/moet je laten zien dat de formule afleidbaar is in ieder van de 4 gevallen, dus onder ieder van de vier aannames, bijvoorbeeld $(\neg p_0 \wedge p_1) \vdash (((p_0 \to p_1) \to p_0) \to p_0)$. Ten slotte combineren we de gevallen met behulp van disjunctie eliminatie tot een bewijs van de formule zonder aannames.

Peirce's law is een voorbeeld van een formule alleen opgebouwd uit implicaties die niet bewezen kan worden met alleen de introductie en eliminatie regels voor implicatie (probeer maar); RAA is noodzakelijk. Andersom kun je in natuurlijke deductie RAA ook vervangen door Peirce's law zonder dat dit de notie van afleidbaarheid verandert.

[12] Merk op: de conjunctie levert een formule op omdat de verzameling eindig is.

Dan is $\Gamma \models A$ correct want er is een valuatie die $\Gamma$ waar maakt (sterker: iedere valuatie maakt alle formules in $\Gamma$ waar, want die zijn er niet ...) maar $A$ niet waar maakt, neem bijvoorbeeld $V(p_0) := 0$.

Maar $\Gamma \models \neg A$ is niet correct, want het is niet zo dat alle valuaties die $\Gamma$ waar maken (dat zijn alle valuaties; zie boven), ook $\neg A$ waar maken. Bijvoorbeeld de valuatie $V(p_0) := 1$ doet dat niet.[13]

## Referenties

[1] Hendrik Jan Veenstra, Vincent van Oostrom, and Albert Visser. Parvulae logicales: Propositielogica, vrijdag 7 oktober 2011. (klikbare link naar versie op annotatiesysteem).

[13] Deze opgave en dit antwoord erop zijn tijdens het vragenuur behandeld.
Het punt is dat $\Gamma$ de waarheidswaarden van de propositievariabelen niet hoeft vast te leggen. In het voorbeeld, waar $\Gamma$ de lege verzameling is, wordt de waarheidswaarde van $p_0$ niet vastgelegd.