AANVULLENDE TOETS INLEIDING LOGICA VOOR CKI

VRIJDAG 3 DECEMBER 2010, 13.30 – 16.30, RUPPERT C

LEES DIT EERST:. Zet op elke blad uw naam en collegekaartnummer. De bonusvragen zijn optioneel. Aanbeveling: bewaar de bonusvragen voor het laatst.

Je kunt in totaal 50 punten halen, voor de niet-bonus vragen. 50 punten betekent een 10 voor deze toets. *Geef altijd uitleg.*

1. VERTALINGEN

Vertaal de onderstaande zinnen zo nauwkeurig mogelijk in de taal van de predikatenlogica. Het discussiedomein is de verzameling van de nu levende Nederlandse slakken. Gebruik de volgende vertaalsleutel.

Sxy:	x is (strikt) sneller dan y	s:	Slijmpie
Ixy:	x is identiek aan y	h:	Herma
		f:	Frodia

a. Slijmpie is (strikt) sneller dan Herma, tenzij Slijmpie (strikt) langzamer is dan Frodia. (2pt)

b. Frodia is even snel als Slijmpie. (2pt)

c. Elke Nederlandse slak is langzamer dan of even langzaam als Slijmpie. (2pt)

d. Als er al een slak is die langzamer is dan Herma, dan is er ook een slak die langzamer is dan Frodia of Slijmpie. (2pt)

e. Slijmpie en Frodia zijn de twee snelste slakken van Nederland. (2pt)

2. PROPPOTPOURRI

Beschouw de formule A gegeven door $\neg((q \vee p) \wedge \neg q)$.

a. Geef de ontleedboom van A. (1pt)

b. Geef de waarheidstafel van A. (1pt)

c. Stel we hebben een (binair) connectief met de waarheidstafel van A. Is dat connectief samen met $\perp$ functioneel volledig?[1] (3pt)

d. Geef een disjunctieve normaalvorm van A. (2pt)

Laten we de door u gevonden disjunctieve normaalvorm B noemen.

i. Toon aan dat B logisch equivalent is aan A m.b.v. waarheidstafels. (1pt)

[1] Een simpel ja of nee als antwoord, zonder argumentatie levert geen punten op.

ii. Toon aan dat B logisch equivalent is aan A, door te laten zien dat B naar A getransformeerd kan worden m.b.v. de standaard logische equivalenties. (2pt)

e. *Bonus:* Geef een inductieve definitie van de verzameling formules DOR die opgebouwd zijn uit de propositionele variabelen en (alleen) de connectieven $\bot$, $\top$, $\wedge$, $\vee$, en $\neg$. Geef vervolgens een recursieve definitie van de functie d die voor iedere formule haar duale teruggeeft, verkregen door $\top$ en $\bot$ te verwisselen, $\wedge$ en $\vee$ te verwisselen en $\neg$ ongemoeid te laten. B.v. $d(A) = \neg((q \wedge p) \vee \neg q)$ en $d(p \wedge \bot) = p \vee \top$. (3pt)

3. Modellen

Bezie de signatuur $\Sigma = \langle \{P, Q\}, \emptyset, \mathsf{ar}\rangle$, waar $\mathsf{ar}(P) = 1$, $\mathsf{ar}(Q) = 2$.

a. Zij $A := \exists x\,(Px \wedge \forall y\, Qxy)$. Geef een model $\mathcal{M}$ waarin A waar is en een model $\mathcal{N}$ waarin A onwaar is. Teken pijldiagrammen van deze modellen. Geef een verificatie met behulp van de semantische regels van de waarheid van A in $\mathcal{M}$ en de onwaarheid van A in $\mathcal{N}$. (4pt)

b. Laat zien dat: $\forall x\,(Px \vee \exists y\, Qxy) \not\models \forall x\, Px \vee \forall x\, \exists y\, Qxy$. U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven. (3pt)

c. Laat zien dat $\forall x\,(Px \wedge Qx)$ logisch equivalent is met $\forall x\, Px \wedge \forall x\, Qx$. Gebruik hierbij modellen. (3pt)

4. Natuurlijke Deductie

Geef natuurlijkedeductiebewijzen van de volgende stellingen. (Hier gaat het bij (a) en (b) uiteraard om Natuurlijke Deductie voor Propositielogica en in (c) en (d) om Natuurlijke Deductie voor Predicatenlogica.)

a. $(p \to q) \to (p \wedge (q \to r)) \vdash (p \to q) \to r$. (2pt)

b. $\vdash p \leftrightarrow \neg\neg p$. (2pt)

c. $\exists x\, \forall y\, Pxy \vdash \exists x\, \exists y\, (Pxy \vee Qxy)$. (3pt)

d. $\forall x\, \neg Rxx,\ \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz) \vdash \forall x\, \forall y (Rxy \to \neg Ryx)$. (3pt)

5. Prenex Normaalvorm

Zij $A := \forall x\, Px \wedge \exists x\, Qx$.

a. Geef een prenex normaalvorm voor A die met een voor-alle kwantor begint. (3pt)

b. Geef een prenex normaalvorm voor A die met een er-is kwantor begint. (3pt)

c. Bewijs met Natuurlijke Deductie dat elk van deze normaalvormen logisch equivalent is met de oorspronkelijke formule. (4pt)

d. *Bonus:* Waarom zouden we de prenex normaalvorm van A eigenlijk het liefst uitdrukken als:

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\\ \exists y\end{array}\right]\!\!-(Px \wedge Qy) \qquad\qquad (2pt)$$