Inleiding Logica

Deeltoets, donderdag 8 oktober 2009, 13.30-16.30

Deze deeltoets is geloten boek. Hij bestaat uit 5 opgaven die ieder bestaan uit 2 gewone onderdelen. Opgave 4 heeft ook een (laatste, lastiger) bonusonderdeel. Met ieder onderdeel kan 1 punt behaald worden. Er zijn dus in totaal maximaal 11 punten te behalen. Het cijfer is het minimum van 10 en het aantal behaalde aantal punten. Motiveer altijd uw antwoord. (B.v. levert een simpel 'ja' of 'nee', zonder verdere motivering, als antwoord op de laatste vraag in opgave 2(b) geen punten op.)

Opgave 1. Deze opgave betreft syllogismen.

Laat A, B en C drie eigenschappen zijn. Eén van de volgende twee gevolgtrekkingen is geldig. [1]

Geen A is B	Geen A is B
Een C is A	Alle C zijn B
Niet alle C zijn B	Een C is A

(a) Bewijs de geldigheid van de geldige gevolgtrekking m.b.v. Venn-diagrammen.

(b) Bewijs de ongeldigheid van de ongeldige gevolgtrekking op dezelfde manier.

Opgave 2. Deze opgave betreft de taal van de propositielogica en waarheidstabellen.

(a) Geef waarheidstabellen van de formules $((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r)$ en $((\neg p) \wedge (q \rightarrow r))$. Geef valuaties die laten zien dat geen van beide formules een geldig gevolg van de andere formule is.

(b) Over een misdaad zijn de volgende gegevens over de (enig) mogelijke daders Albert, Bert en Clemens bekend:

φ Als Clemens het gedaan heeft, dan óf Albert óf Bert ook (maar niet allebei).

ψ Er is een oneven aantal daders.

Geef (fonetisch) de uitspraak van de Griekse letters φ and ψ. Vertaal de twee beweringen naar proposities. (U mag de verzameling propositionele variabelen waarin daderschap van de 3 personen uitgedrukt wordt zelf kiezen.) Kunnen Albert en Bert handlangers zijn, d.w.z. kunnen ze tegelijkertijd dader zijn?

Opgave 3. Deze opgave betreft semantische tableaus.

(a) Bepaal met behulp van een semantisch tableau of $((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r)$ vervulbaar is of niet. Geef het tableau dat dat aantoont, en geef ook aan hoe/waarom uit dat tableau volgt of de formule vervulbaar is (en geef dan de valuatie) of niet.

[1] Let op! In de syllogistiek staat 'Een' voor wat zich in gewoon Nederlands eenduidig laat beschrijven door 'Ten minste één'.

(b) Voor rijtjes formules Γ, Δ betekent $\Gamma \models \Delta$ dat iedere valuatie die alle formules in Γ waar maakt, ook (ten minste) één formule in Δ waar maakt. Laat zien dat de tableau regel $\neg$-L voor negatie-links correct is. D.w.z. toon aan dat $\Gamma, \neg\varphi, \Gamma' \models \Delta$ (geldigheid van het sequent 'boven') dan en slechts dan als $\Gamma, \Gamma' \models \varphi, \Delta$ (geldigheid van het sequent 'onder').

Opgave 4. Deze opgave betreft Boolese equivalenties en normaalvormen.

(a) Beschouw een connectief f met drie inputs, dat de volgende waarheidstabel heeft:

p	q	r	$f(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Dus $f(p,q,r)$ is waar als precies twee van p, q, r waar zijn. Geef een formule φ in disjunctieve normaalvorm met propositionele variabelen p, q, r voor dit connectief f, d.w.z. geef een formule met deze waarheidstabel. Geef ook aan waarom de door u gevonden formule in disjunctieve normaalvorm is.

(b) Laat zien dat de formules $p \wedge (q \vee r)$ en $(r \wedge p) \vee (p \wedge q)$ equivalent zijn met behulp van Boolese equivalenties. Geef de hele transformatie en in iedere stap van de transformatie de naam van de gebruikte Boolese equivalentie (als die een naam heeft; b.v. associativiteit).

(c) Bonus.
Beschouw de beperking van propositielogica tot formules opgebouwd uit de connectieven $\vee$, $\wedge$, $\perp$, $\top$ en de propositionele variabelen $\{\mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}, \mathtt{E}, \mathtt{H}, \mathtt{I}, \mathtt{K}, \mathtt{M}, \mathtt{O}, \mathtt{W}, \mathtt{X}\}$. Laat equivalentie van φ en ψ bewezen zijn m.b.v. de Boolese equivalenties in deze taal, dus zonder gebruikmaking van andere connectieven tussendoor. Beargumenteer dat dan $\rotatebox{180}{$\varphi$}$ en $\rotatebox{180}{$\psi$}$, d.w.z. de formules 'op hun kop gezet', ook equivalent zijn, en equivalentie aangetoond wordt door de gebruikte Boolese equivalenties 'op hun kop te zetten'. Bijvoorbeeld, omdat we de equivalentie $(\mathtt{M} \wedge \perp) \equiv \perp$ hebben, volgt door 'op z'n kop zetten' dat $(\mathtt{W} \vee \top) \equiv \top$ (en andersom).

Opgave 5. Deze opgave betreft natuurlijke deductie.

(a) Toon met behulp van natuurlijke deductie aan dat $\vdash (\psi \to \chi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$. Beargumenteer dat een natuurlijke deductie bewijs van $\vdash (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ *niet* kan eindigen met de disjunctie-introductie regel. Met welke regel(s) kan het bewijs wel eindigen?

(b) Formuleer de corredtheid en volledigheidsstelling voor natuurlijke deductie en gebruik deze om aan te tonen dat er geen natuurlijke deductie bewijs bestaat van $((p \to q) \to (q \to p))$.