1/2

| | |
|---|---|
| naam en voorletters: (indien gehuwd, meisjesnaam) | Simone van Bruggen |
| geb. datum: | 23/11/1994 |
| reg. nr. collegekaart | [redacted] |
| tentamen: | Inleiding Logica |
| datum: | 7/10/2013 |
| studierichting: | KI |
| jaar/groep: | 1 |
| cijfer: | |

**Universiteit Utrecht**

*Faculteit Geesteswetenschappen*

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | B | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 17 | 16 | 12 | 18 | 3 | 83 |

① (a) i. vertaalsleutel (voor i t/m iv)

p = Frodo heeft de ring.
q = Gollum heeft de ring
r = Bilbo heeft de ring
s = Sméagol ~~heeft~~ de ring

Vertaling: $p \vee q \vee r \vee s$

5.

ii. $(p \wedge \neg(q \vee r)) \vee (q \wedge \neg(p \vee r)) \vee (r \wedge \neg(p \vee q))$

$\vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

iii. $\neg s \to \neg(p \vee r)$

iv. $s \leftrightarrow q$

(b.)

6

| | p q r s | $p \vee q \vee r \vee s$ | $(p \wedge \neg(q \vee r)) \vee (q \wedge \neg(p \vee r)) \vee (r \wedge \neg(p \vee q))$ | $\neg s \to \neg(p \vee r)$ | $s \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| X | 0 0 0 0 | 0 | 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 | 1 1 1 0 | 0 1 |
| X | 0 0 0 1 | 1 | 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 | 0 1 1 0 | 0 |
| X | 0 0 1 0 | 1 | 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 | 1 0 0 1 | 0 1 |
| X | 0 0 1 1 | 1 | 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 | 0 1 0 1 | 0 |
| X | 0 1 0 0 | 1 | 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 | 1 1 1 0 | 0 |
| → | 0 1 0 1 | 1 | 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 | 0 1 1 0 | 1 |
| X | 0 1 1 0 | 1 | 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 | 1 0 0 1 | 0 |
| X | 0 1 1 1 | 1 | 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 | 0 1 0 1 | 1 |
| X | 1 0 0 0 | 1 | 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 | 1 0 0 1 | 0 1 |
| X | 1 0 0 1 | 1 | 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 | 0 1 0 1 | 0 |
| X | 1 0 1 0 | 1 | 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 | 1 0 0 1 | 1 |
| X | 1 0 1 1 | 1 | 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 | 0 1 0 1 | 0 |
| X | 1 1 0 0 | 1 | 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 | 1 0 0 1 | 0 |
| X | 1 1 0 1 | 1 | 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 | 0 1 0 1 | 1 |
| X | 1 1 1 0 | 1 | 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 | 1 0 0 1 | 0 |
| X | 1 1 1 1 | 1 | 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 | 0 1 0 1 | 1 |

zie achterzijde blad 2 voor vervolg!!

c. Als een voegteken waarheidsdefiniet is, hangt de waarde van de hele zin ~~afwaarden to~~ alleen af van de waarden van de atomaire propositie (i.e. het voegwoord heeft zelf dus geen waarheidswaarde).
vb. met waarheidsdefiniet voegwoord:
Ik maak een tentamen en ik drink water.
Deze zin bestaat uit 2 atomaire proposities, namelijk "ik maak een tentamen" en "ik drink water". De waarheid van deze zin hangt hier alleen af van de waarheid van de proposities.
vb. met niet-waarheidsdefiniet voegwoord:
De daken zijn wit, omdat het sneeuwt.
Hierbij hangt de waarheid van de zin niet alleen af van de losse onderdelen ("de daken zijn wit" en "het sneeuwt"), maar ook vam de waarheid van het verband tussen die twee (de daken kunnen immers ook wit geschilderd zijn). Dan kunnen de onderdelen nog wel waar zijn, maar als het verband niet klopt, is de zin alsnog niet waar.

6

② ~~(a)~~ Inductieve ~~definitie~~ definitie van FOR
(i) $p_i$ is een element van FOR voor alle i;
(ii) $\bot$ is een element van FOR;
(iii) Als A een element van FOR is, dan is $\neg A$ dat ook;
(iv) Als A en B elementen van FOR zijn, dan is $A \square B$ dat ook (met $\square = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$)

5.

(a)

$\neg\neg\neg(\bot \leftrightarrow p_2)$
|
$\neg\neg(\bot \leftrightarrow p_2)$
|
$\neg(\bot \leftrightarrow p_2)$
|
$\bot \leftrightarrow p_2$
/ \
$\bot$ $p_2$

$\bot$ is element van FOR (ii) en $p_2$ is element van FOR (i)
dus $\neg\neg\neg(\bot \leftrightarrow p_2)$ is een formule v/d propositielogica.

✓ half?

:–) is geen formule v/d propositielogica, want hij kan niet gemaakt worden volgens clausule (i) (niet v/d vorm $p_0$). Ook niet volgens clausule (ii) (niet v/d vorm $\bot$) en niet volgens clausule (iii), want er zit geen negatie in. Ten slotte kan de formule ook niet volgens clausule ~~(ii)~~ (iv) worden gemaakt, want het bevat geen connectief v/d vorm $\wedge, \vee, \rightarrow$ of $\leftrightarrow$. Dus geen formule v/d propositielogica.

$(p_1 \vee ((p_2 \vee p_3) \wedge p_0))$

|

~~$p_2$~~ $p_1 \vee ((p_2 \vee p_3) \wedge p_0)$

/ \

$p_1$ $(p_2 \vee p_3) \wedge p_0$

/ \

$p_2 \vee p_3$ $p_0$

/ \

$p_2$ $p_3$

$p_0$, $p_1$, $p_2$ en $p_3$ zijn allemaal elementen van FOR ~~(e)~~ (i), dus $(p_1 \vee ((p_2 \vee p_3) \wedge p_0))$ is een formule v/d propositielogica.

✓ [illegible]

(b)

| | $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_0 \wedge p_1$ | $p_2 \wedge p_3$ | $((p_0 \wedge p_1) \vee (p_2 \wedge p_3))$ | $\neg((p_0 \wedge p_1) \vee (p_2 \wedge p_3))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| → | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| → | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| → | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| → | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| → | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| → | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| → | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| → | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| → | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

6 We moeten een formule hebben die waar is voor de valuaties die met een pijl zijn aangegeven:

$$((\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee$$
$$(\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee$$
$$(\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee$$
$$(p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee$$
$$(p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3))$$

(c) Recursieve ~~definit~~ definitie van de functie f op FOR

(i) $f(p_i) := x$ voor alle $i$;
(ii) $f(\bot) := x$;
(iii) $f(\neg A) := \cancel{x +} f(A)$;
(iv) $f((A \Box B)) := x + f(A) + x + f(B) + x$
(met $\Box = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$)

Voorbeelden: $f(p_2) = x$ (i)

$f(\bot) = x$ (ii)

6

$$f(\neg\neg\neg p_1) = x + f(\neg\neg p_1) \quad \text{(iii)}$$
$$= xx + f(\neg p_1) \quad \text{(iii)}$$
$$= xxx + f(p_1) \quad \text{(iii)}$$
$$= xxxx \quad \text{(i)}$$

$$f((\bot \vee p_0)) = x + f(\bot) + x + f(p_0) + x \quad \text{(iv)}$$
$$= x + x + x + f(p_0) + x \quad \text{(ii)}$$
$$= x + x + x + x + x \quad \text{(i)}$$
$$= xxxxx$$

3 (a) Een redeneerschema is geldig als voor alle valuaties V waarvoor alle premissen waar zijn, ook de conclusie waar is.

2/2

Universiteit Utrecht

*Faculteit Geesteswetenschappen*

naam en voorletters: Simone van Bruggen (S.)
(indien gehuwd, meisjesnaam)

geb. datum: 23/11/1994

reg. nr. [redacted]
collegekaart

tentamen: Inleiding logica

cijfer:

datum: 7/10/2013

studierichting: KI

jaar/groep: 1

6

| p q r | $q \vee r$ | $q \wedge p$ | | $p \wedge (q \vee r)$ | $(q \wedge p) \rightarrow \bot$ | | $r \rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 0 | 0 | $V_1$ | 0 | 1 0 | | 1 |
| 0 0 1 | 1 | 0 | $V_2$ | 0 | 1 0 | | 0 |
| 0 1 0 | 1 | 0 | $V_3$ | 0 | 1 0 | | 1 |
| 0 1 1 | 1 | 0 | $V_4$ | 0 | 1 0 | | 1 |
| 1 0 0 | 0 | 0 | $V_5$ | 0 | 1 0 | | 1 |
| 1 0 1 | 1 | 0 | $V_6$ | 1 | 1 0 | * | 0 |
| 1 1 0 | 1 | 1 | $V_7$ | 1 | 0 0 | | 1 |
| 1 1 1 | 1 | 1 | $V_8$ | 1 | 0 0 | | 1 |

Alleen voor valuatie $V_6$ zijn alle premissen waar, maar dan is de conclusie niet waar. ~~Daarom~~ Het redeneerschema is dus ongeldig.

6

(b) Als we een tegenvoorbeeld kunnen vinden, kunnen we aantonen dat het redeneerschema niet geldig is. Er moet dan gelden (i) $V \models p \wedge (q \vee r)$, (ii) $V \models (q \wedge p) \rightarrow \bot$ en (iii) $V \not\models r \rightarrow q$.
Als $V \not\models r \rightarrow q$, dan volgt daaruit met sem→ dat $V \models r$ en $V \not\models q$. Uit (i) volgt met sem∧ dat $V \models p$ en $V \models (q \vee r)$. Uit $V \models (q \vee r)$ volgt met sem∨ dat $V \models q$ of $V \models r$. We zagen al dat $V \not\models q$ (iii), dus moet gelden $V \models r$. Tot nu toe geen tegenspraak.
Uit (ii) volgt met sem→ dat $V \not\models (q \wedge p)$ of $V \models \bot$. V kan nooit ⊥ waarmaken, dus moet gelden $V \not\models (q \wedge p)$. Hieruit volgt met sem∧ dat $V \not\models q$ of $V \not\models p$. We hadden al gezien dat $V \not\models q$ en $V \models p$. Dit kan, dus we hebben een tegenvoorbeeld gevonden. Het redeneerschema is dus niet geldig.

(c) ~~We willen dus weten of er een mogelijke valuatie is waarvoor tegelijkertijd $p \wedge (q \vee r)$, $(q \wedge p) \rightarrow \bot$, en $r \rightarrow q$ waar zijn. Als we deze formules m.b.v. conjunctie samenvoegen, krijgen we de formule A.~~ z.o.z.

~~$A: ((p \wedge (q \vee r)) \wedge ((q \wedge p) \rightarrow \bot) \wedge (r \rightarrow q)) \wedge \neg((p \wedge (q \vee r)) \wedge$~~
~~$((q \wedge p) \rightarrow \bot) \wedge \neg(r \rightarrow q))$~~

~~$A: \neg((p \wedge (q \vee r)) \wedge ((q \wedge p) \rightarrow \bot) \wedge \neg(r \rightarrow q))$~~

~~$A: ((p \wedge (q \vee r)) \wedge ((q \wedge p) \rightarrow \bot) \wedge (r \rightarrow q))$~~

~~Als A vervulbaar is, is er dus een valuatie waarvoor alle $p \wedge (q \vee r)$, $(q \wedge p) \rightarrow \bot$ en $r \rightarrow q$ tegelijkertijd waar zijn. Dit betekent dat dan A ook geldig is (want voor een geldig redeneerschema moeten ook alle onderdelen (incl. conclusie) waar zijn waar. Bovendien kan het niet zo zijn dat de premissen wel waar zijn en de conclusie niet. Als de formule A vervulbaar is, geldt er dus dat de voor alle valuaties waarvoor de premissen waar zijn, ook de conclusie waar is → dus geldige redenering.~~
~~We moeten dus kijken~~

$A: ((p \wedge (q \wedge r)) \wedge ((q \wedge p) \rightarrow \bot)) \wedge (((p \wedge (q \wedge r)) \wedge ((q \wedge p) \rightarrow \bot))$
$\rightarrow (r \rightarrow q))$ in alle werelden

Formule A is alleen vervulbaar als $(p \wedge (q \wedge r))$ en $((q \wedge p) \rightarrow \bot)$ waar zijn (de premissen) en als er bovendien geldt dat als de twee premissen waar zijn, de conclusie ook waar is. (want als het eerste deel v/d formule waar is (de premissen), dan geldt voor het tweede deel dat $(r \rightarrow q)$ ook waar moet zijn (immers $V \vDash A \rightarrow B$ desda $V \nvDash A$ of $V \vDash B \Rightarrow V \vDash A$ dus $V \vDash B$ (met B in dit geval $r \rightarrow q$)). De formule is niet vervulbaar als de premissen waar zijn en de conclusie niet. (dus bij een ongeldig redeneerschema)

4

④ (a).

$\dfrac{\dfrac{p_2 \wedge \neg p_0}{\neg p_0}\wedge E \qquad \dfrac{p_0 \wedge p_1}{p_0}\wedge E}{\dfrac{\bot}{p_3}\bot E}\neg E$

6

We houden bovenin de boom alleen de aannames over en onderin alleen de conclusie, dus $p_0 \wedge p_1, p_2 \wedge \neg p_0 \vdash p_3$.

(b)

$\neg(p_0 \vee p_1)$ ¬E,1 — $\neg(p_0 \vee p_1)$ ¬E,2
$\bot$ ⊥E — $\bot$ ⊥E
$[p_1]^3$ $[p_0 \vee p_1]$ ∨E — $[p_0 \vee p_1]^2$ $[p_0]^4$ ∨E
$[p_1]^3$ — $[p_0]^4$
$\bot$ ¬I,3 — $\bot$ ¬I,4
$\neg p_1$ — $\neg p_0$
$\neg p_1 \wedge \neg p_0$ ∧I

3

Bovenin de boom hebben we alleen nog onze aanname, en onderin de boom alleen de conclusie, dus $\neg(p_0 \vee p_1) \vdash (\neg p_1 \wedge \neg p_0)$

6

6

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p_0]^1}{(p_1 \rightarrow p_0)}\rightarrow I}{(\neg p_1 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0))}\rightarrow I}{(p_0 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)))}$$

We houden bovenin alleen een ~~(niet-~~ingetrokken) aanname over en onderin alleen de conclusie, dus $\vdash (p_0 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)))$

3

$\vdash (p_0 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)))$ is een tautologie, en kan herschreven worden als $p_0, \neg p_1 \vdash (p_1 \rightarrow p_0)$ (want $A, B \vdash C$ kan geschreven worden als $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C))$)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p_1]^1 \quad \neg p_1}{\bot}\neg E}{p_0}\bot E}{p_1 \rightarrow p_0}\rightarrow I,1$$

Bovenin hebben we alleen nog (niet-ingetrokken) aannames over en onderin alleen de conclusie, dus $p_0, \neg p_1 \vdash (p_1 \rightarrow p_0)$ dus $\vdash (p_0 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)))$

bewijs v. zelfde, niet v. equivalentie gevraagd.

⑤ (a) i.

| $p_0$ | $\bot$ | $(p_0 \rightarrow p_0)$ | $((p_0 \rightarrow p_0) \rightarrow \bot)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |

De formule is nooit waar (laatste kolom alleen nullen), dus de formule is een contradictie.

6

ii.

| $p_0$ | $\bot$ | $p_0 \rightarrow \bot$ | $(p_0 \rightarrow (p_0 \rightarrow \bot))$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |

De formule is waar of onwaar (laatste kolom nul en één), dus de formule is contingent.

(b) 2.0.2.

6

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg q$ | $\neg r$ | $p$ | $\neg q \vee r$ | $p \vee q$ | $\neg r \vee p$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ← |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | ← |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | ← |

Er zijn valuaties (~~zij~~ zie pijlen) waarvoor alle formules tegelijkertijd waar zijn, dus de ~~fo~~ verzameling is niet strijdig.

(c) m.b.v. waarheidstafel:

| $p$ | $p \wedge \neg p$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0 |

blijkt dat deze formule nooit waar kan zijn (contradictie), dus $\nvDash p \wedge \neg p$. ~~Volgens de volledigheidsstelling ($\Gamma \vDash A \Rightarrow \Gamma \vdash A$) kunnen we dan ook zeggen dat $\nvdash p \wedge \neg p$.~~ Er kan ~~namelijk~~ nooit gelden $\vDash p \wedge \neg p$, dus als zou gelden $\vdash p \wedge \neg p$, dan moet volgens de correctheidsstelling ook gelden $\vDash p \wedge \neg p$ (want $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \vDash A$). Dit kan niet, dus moet het zo zijn dat $\nvdash p \wedge \neg p$.

6

(bonus) ~~a~~ Een functioneel volledige verzameling kan alle mogelijke propositionele formules uitdrukken en heeft dus geen andere connectieven nodig. We kunnen echter een formule als $(A \wedge B)$ niet m.b.v. $\{\bot, \neg\}$ omschrijven ($\neg\bot$? ~~...~~ Dat kan ook niet, want we weten de waarheidswaarden van $A$ en $B$ helemaal niet, terwijl de waarheidswaarde van $\neg\bot$ vaststaat ...) $\neg A \bot B$ is bv. ook geen geldige formule ~~..~~, dus met $\{\bot, \neg\}$ kunnen niet alle propositionele formules worden uitgedrukt dus niet functioneel volledig

fundi...

Waarom

3

→ 1b De enige mogelijkheid is dat $p=0$ $q=1$ $r=0$ $s=1$, dus: Gollum ~~h~~ en Sméagol hebben de ring.