1|13

Universiteit Utrecht

Faculteit Geesteswetenschappen

naam en voorletters: L.S. Eekhof
(indien gehuwd, meisjesnaam)

geb. datum: 08-06-1993 reg. nr. [redacted]

tentamen: Logica college[redacted]

datum: 7-10-2013

studierichting: TLW ~~jaar/~~groep: 1, Rijk

cijfer:

1	2	3	4	5	B	Σ
18	18	15	18	18	–	87

① a. p: Frodo heeft de ring
q: Gollum heeft de ring
r: Bilbo heeft de ring
s: Sméagol heeft de ring

6

i. $(((p \vee q) \vee r) \vee s)$

ii. $(((p \wedge (\neg q \wedge \neg r)) \vee (q \wedge (\neg p \wedge \neg r))) \vee (r \wedge (\neg q \wedge \neg p)))$

$\vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

iii. $(\neg s \rightarrow (\neg p \wedge \neg r))$

iv. $(s \leftrightarrow q)$

b. Eerste deel waarheidstafel:

6

p	q	r	s	s	↔	q	¬	s	→	(¬	p	∧	¬	r)
0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1

p	q	r	s	(((p∨q)∨r)∨s)			(((p∧(¬q∧¬r))∨(q∧(¬p∧¬r)))∨(r∧(¬q∧¬p)))		
0	0	0	0	000 00	0	0	0010110 0 00 10110	0	0010110
0	0	0	1	000 00	1	1	0010110 0 00 10110	0	0010110
0	0	1	0	000 11	1	0	0010001 0 00 10001	1	1110110
0	0	1	1	000 11	1	1	0010001 0 00 10001	1	1110110
0	1	0	0	011 10	1	0	0001010 1 1 10110	1	0001010
0	1	0	1	011 10	1	1	0001010 1 1 10110	1	0001010
0	1	1	0	011 11	1	0	0001001 0 1 010001	0	1001010
0	1	1	1	011 11	1	1	0001001 0 1 010001	0	1001010
1	0	0	0	110 10	1	0	1101101 0 0 01010	1	0010001
1	0	0	1	110 10	1	1	1101101 0 0 01010	1	0010001
1	0	1	0	110 11	1	0	1010001 0 00 01001	0	1010001
1	0	1	1	110 11	1	1	1010001 0 00 01001	0	1010001
1	1	0	0	111 10	1	0	1001010 0 1 0010100	0	0001001
1	1	0	1	111 10	1	1	1001010 0 1 0010100	0	0001001
1	1	1	0	111 11	1	0	1001001 0 1 001001	0	1001001
1	1	1	1	111 11	1	1	1001001 0 1 001001	0	1001001

Dus alleen de 6e valuatie, V(q)=V(s)=1 en V(p)=V(r)=0 maakt alle formules waar. Dus Sméagol en Gollum hebben de ring. En nu wil ik voorlopig geen waarheidstafel meer zien :-)!

ja.

②

(*) niet waarheidsdefiniet ~~op~~ omdat de waarheid ook afhangt van het al dan niet
7 werkelijke/correcte verklarende verband.

---

c. Een voegteken is waarheidsdefiniet als hij van atomaire proposities complexe proposities maakt waarvan de waarheidswaarden alléén afhangen van de
6 waarheidswaarden van de atomaire proposities.

VB van wél waarheidsdefiniet: "en"
Het regent en ik loop op straat.

VB van niet waarheidsdefiniet: "omdat"
Het is nat buiten omdat het regent.
(*)

② (a) Inductieve definitie vande verzameling FOR:

i. $p_0, p_1, p_2 \dots p_n \in FOR$
ii. $\bot \in FOR$
iii. als $A \in FOR$, dan ook $\neg A \in FOR$
iv. als A en B $\in FOR$, dan ook $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ en $(A \leftrightarrow B)$.

6 Voorrangsregels: $\neg$, $\vee \wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$

$\neg\neg\neg(\bot \leftrightarrow p_2)$ — Ja, dit is een formule
i ii
$\neg\neg(\bot \leftrightarrow p_2)$ — van propositielogica want we kunnen een
i ii
$\neg(\bot \leftrightarrow p_2)$ — correcte ~~lege~~ ~~afleid~~boom ontleed maken.
i ii
$(\bot \leftrightarrow p_2)$
iv
ii → $\bot$ p_2 ← i

kan niet met minder haakjes.

:-) Nee, want we kunnen geen ~~afleid~~ ontleedboom maken. Regel i, ii, iii, iv bevatten
× allemaal niet de teken : en -.
Regel iv heeft wel het teken)

maar die vereist ook een geopend haakje.

$(p_1 \vee ((p_2 \vee p_3) \wedge p_0))$

Ja, want wederom kunnen we een correcte ontleedboom maken. Met zo min mogelijk haakjes:

$p_1 \vee ((p_2 \vee p_3) \wedge p_0)$

$\text{i} \rightarrow p_1 \qquad \overset{\text{iv}}{((p_2 \vee p_3) \wedge p_0)}$

$\overset{\text{iv}}{(p_2 \vee p_3)} \qquad p_0 \leftarrow \text{i}$

$\text{i} \rightarrow p_2 \qquad p_3 \leftarrow \text{i}$

b. Ik doe dit dmv een waarheidstafel.

6

p_0	p_1	p_2	p_3	$\neg$	$((p_0$	$\wedge\, p_1)$	$\vee$	$(p_2$	$\wedge\, p_3))$		
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1

Dat geeft de disjunctieve normaalvorm:

$(((((((((\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)) \vee$
$(\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)) \vee$
$(\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)) \vee$
$(p_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3))$

Universiteit Utrecht

Faculteit Geesteswetenschappen

2/3

naam en voorletters: L.S. Eekhof
(indien gehuwd, meisjesnaam)

geb. datum: 08-06-1993 reg. n[redacted]
colleg[redacted]

tentamen: Logica

datum: 7-10-2013

studierichting: TLW ~~jaar~~/groep: 1, Rgk

cijfer:

Deze formule is een disjunctieve normaalvorm omdat er eerst een laag disjuncties is met daarbinnen een laag conjuncties. De negaties staan direct bij de atomen.

c. Recursieve definitie van de functie f (gedefinieerd op FOR, zie vraag 2)

$f(p_n) =: x$
$f(\bot) =: x$
$f(\neg A) = x + f(A)$
$f(A \square B) = x + f(A) + x + f(B) + x$
(met $\square$ $= \wedge, \vee, \rightarrow$ of $\leftrightarrow$)

6

dit geeft:
$f(p_2) = x$
$f(\bot) = x$
$f(\neg\neg\neg p_1) = x + f(\neg\neg p_1)$
$= x + x + f(\neg p_1)$
$= x + x + x + f(p_1)$
$= x + x + x + x = xxxx$
$f((\bot \vee p_0)) = x + f(\bot) + x + f(p_0) + x$
$= x + x + x + x + x = xxxxx$

3a. Een redeneerschema is geldig desda voor elke valuatie V geldt dat als V de premissen waar maakt, dan V maakt ook de conclusie waar.

p	q	r	$(q \vee r)$	$(q \wedge p)$		$(p \wedge (q \vee r))$	$(q \wedge p) \to \bot$		$r \to q$
0	0	0	0	0	V_1	0	1		1
0	0	1	1	0	V_2	0	1		0
0	1	0	1	0	V_3	0	1		1
0	1	1	1	0	V_4	0	1		1
1	0	0	0	0	V_5	0	1		1
1	0	1	1	0	V_6	1	1	*	0 ←
1	1	0	1	1	V_7	1	0		1
1	1	1	1	1	V_8	1	0		1

De V waarvoor geldt dat ze de premissen waar~~maken~~maakt ~~zijn~~ is met * gemarkeerd.
Zoals te zien is R niet geldig. Bij $V6$ is te zien dat $V6 \models$ premissen maar $V6 \not\models$ conclusie.
Het is dus niet zo dat voor elke V die de premissen waar maakt geldt dat V ook de conclusie waarmaakt.

* stelling: A/C dan $A \models C$

definitie

geldig desda

6

b. Als R geldig is moet gelden: *

$p \wedge (q \vee r), (q \wedge p) \to \bot \models r \to q$

We gaan op zoek naar een tegenvoorbeeld, een V waarvoor geldt $V \models p \wedge (q \vee r), (q \wedge p) \to \bot$ maar $V \not\models r \to q$.

(*) We beginnen met $V \not\models r \to q$.
$V \not\models r \to q$ desda $\underline{V \models r}$ en $\underline{V \not\models q}$ (sem $\to$). ✗

(*) $V \models p \wedge (q \vee r)$ desda $\underline{V \models p}$ en $V \models (q \vee r)$ (sem $\wedge$)
(sem$\vee$) — $V \models (q \vee r)$ desda $V \models q$ of/en $V \models r$. Hierboven hadden we al $V \not\models q$ dus alleen $\underline{V \models r}$

(*) $V \models (q \wedge p) \to \bot$ desda $V \not\models (q \wedge p)$ en/of $V \models \bot$. ✗
$V \not\models \bot$ (sem$\bot$) dus moet $V \not\models q \wedge p$. ↳ sem$\to$

$V \nvDash (q \wedge p)$ desda $V \nvDash q$ en/of $V \nvDash p$ (sem $\wedge$).
Hierboven hadden we al $V \vDash p$ dus alleen $\underline{V \nvDash q}$.

We hebben nu een valuatie gevonden, $V \vDash p$, $V \nvDash q$, $V \vDash r$, die de premissen waar maakt, maar de conclusie niet.
R is dus ongeldig.

c. ~~Zoals al gezegd is een redeneerschema A/C geldig als $A \vDash C$.~~
~~$A \vDash C$ betekent $V \vDash A \Rightarrow V \vDash C$.~~
~~Dus voor elke valuatie V zodra $V \vDash A$ geldt ook $V \vDash C$.~~
~~Er is een stelling die zegt $A \vDash C$ desda $A \cup \{\neg C\}$ is strijdig.~~
~~Als we dus de vervulbaarheid van $A \vee \neg C$ checken en die blijkt onvervulbaar, strijdig dan $A \vDash C$ en dus A/C.~~
~~Zo is geldigheid te bewijzen met vervulbaarheid.~~ ZIE LAATSTE BLAD!

4 a. $p_0 \wedge p_1, p_2 \wedge \neg p_0 \vdash p_3$

6

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p_0 \wedge p_1}{p_0}\wedge E \qquad \dfrac{p_2 \wedge \neg p_0}{\neg p_0}\wedge E}{\bot}\neg E}{p_3}\bot E$$

Ik heb nu laten zien mbv ND dat we van de aannamen $p_0 \wedge p_1$ en $p_2 \wedge \neg p_0$ naar de conclusie kunnen redeneren, p_3.

Ik heb dus bewezen dat die aannamen p_3 bewijzen.

b.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p_1]_1}{p_0 \vee p_1}\vee I \quad \neg(p_0 \vee p_1)}{\perp}\neg E}{\neg p_1}\neg I_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p_0]_2}{p_0 \vee p_1}\vee I \quad \neg(p_0 \vee p_1)}{\perp}\neg E}{\neg p_0}\neg I_2}{(\neg p_1 \wedge \neg p_0)}\wedge I$$

6

Ik heb weer mbv ND laten zien dat we van de aanname $\neg(p_0 \vee p_1)$ naar de conclusie kunnen redeneren, $(\neg p_1 \wedge \neg p_0)$ en dat de aanname de conclusie bewijst

c. $\vdash (p_0 \to (\neg p_1 \to (p_1 \to p_0)))$

(1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg p_1]_2 \quad [p_1]_1}{\perp}\neg E}{p_0}\perp E}{p_1 \to p_0}\to I_1}{(\neg p_1 \to (p_1 \to p_0))}\to I_2}{(p_0 \to (\neg p_1 \to (p_1 \to p_0)))}\to I_3$$

6

of (2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p_0]_3}{p_1 \to p_0}\to I_1}{(\neg p_1 \to (p_1 \to p_0))}\to I_2}{(p_0 \to (\neg p_1 \to (p_1 \to p_0)))}\to I_3 \qquad [p_1]_1 \; [\neg p_1]_2$$

Beide bewijzen laten weer zien dat je ~~van~~ de conclusie kan beredeneren zonder aannamen en dat de conclusie dus een tautologie is.

3/3

Universiteit Utrecht

Faculteit Geesteswetenschappen

naam en voorletters: L.S. Eekhof
(indien gehuwd, meisjesnaam)

geb. datum: 08-06-1993 reg. nr. [redacted]

tentamen: Logica

datum: 7-10-2013

studierichting: TLW ~~jaar/~~groep: 1, Rijk

cijfer:

5 a.

i. $((p_0 \to p_0) \to \bot)$

p_0	$p_0 \to p_0$	$(p_0 \to p_0) \to \bot$
0	1	0
1	1	0

Een formule is een contradictie desda de waarheidstafel alleen ~~e~~ nullen bevat. Deze formule is dus een contradictie.

6

ii. $(p_0 \to (p_0 \to \bot))$

p_0	$p_0 \to \bot$	$(p_0 \to (p_0 \to \bot))$
0	1	1
1	0	0

Een formule is een contingentie desda de waarheidstafel enen en nullen bevat. Deze formule is dus een contingentie.

b. $\{p, \neg q \vee r, p \vee q, \neg r \vee p\}$

Is er één valuatie te vinden die alle formules waarmaakt? Zo ja, dan is de verzameling vervulbaar, dus niet strijdig. Zo nee, dan is de formule strijdig.

(*) $V \models p$

(**) $V \models \neg q \vee r$ desda $V \models \neg q$ of/en $V \models r$ (sem $\vee$)

$V \models \neg q$ desda $\underline{V \not\models q}$ (sem $\neg$).

*** $V \models p \vee q$ desda $\underline{V \models p}$ en/of $\underline{V \models q}$. (sem $\vee$).

**** $V \models \neg r \vee p$ desda $V \models \neg r$ en/of $\underline{V \models p}$ (sem $\vee$)

6 $V \models \neg r$ desda $\underline{V \not\models r}$ (sem $\neg$.

$V \models p$ en ~~$V \models$~~ $V \models r$ en $V \not\models q$ is een voorbeeld van een valuatie die al deze formules tegelijk waarmaakt, blijkt hieruit.
De verzameling is dus niet strijdig.

c. $\not\models p \wedge \neg p$.

Uit de correctheidsstelling volgt:
$V \vdash A \Rightarrow V \models A$
Dat is Equivalent aan:
$V \not\models A \Rightarrow V \not\vdash A$ (contrapositie op metaniveau).

6 Als we dus laten zien dat:
$\not\models p \wedge \neg p$ dan volgt $\not\vdash p \wedge \neg p$.

$\not\models p \wedge \neg p$ betekent dat er minstens één valuatie is die $p \wedge \neg p$ ~~waar~~ niet waarmaakt.

$V \not\models p \wedge \neg p$ desda $\underline{V \not\models p}$ en/of $V \not\models \neg p$ (sem $\wedge$)

$V \not\models \neg p$ desda $\underline{V \models p}$ (sem $\neg$).

Dit is in contradictie met elkaar. Voor

3

3

geen enkele valuatie gelat dat
$V \models p \wedge \neg p$.
Het is dus bewezen dat $\not\models p \wedge \neg p$
en via de correctheidsstelling dus
dat $\nvdash p \wedge \neg p$.

③ c. Een redeneerschema is geldig als de V die de premissen geldig maakt, ook de conclusie waar maakt.
Om dit dmv vervulbaarheid te checken maken we de volgende formule A

3

$\top / \bot$ ...?

$$A =: ((p \wedge (q \vee r)) \wedge ((q \wedge p) \to \bot) \wedge (r \to q))$$

Als deze vervulbaar is is er dus een valuatie mogelijk die $(p \wedge (q \vee r))$ waarmaakt én $((q \wedge p) \to \bot)$ én $(r \to q)$. Die valuatie maakt dus de premissen én de conclusie waar. Zo kun je geldigheid dus dmv vervulbaarheid bewijzen.

— voor alle —