1/3

Universiteit Utrecht

Faculteit Geesteswetenschappen

naam en voorletters: J. van Kemenade
(indien gehuwd, meisjesnaam)

geb. datum: 20-07-1993

reg. nr collegekaart [redacted]

tentamen: Inleiding Logica

datum: 07-10-2013

cijfer:

studierichting: CKI

jaar/groep: 1

1	2	3	4	5	7	B	Σ
15	18	16	12	14	2	>>	

1a) p = Frodo heeft de ring
q = Gollum heeft de ring
r = Bilbo heeft de ring
s = Sméagol heeft de ring 4a.

1b. 5
i) $(p \vee (q \vee (r \vee s)))$
ii) $\neg((p \wedge (q \vee r)) \vee (q \wedge r))$ haakje?
iii) $\neg s \rightarrow (\neg p \wedge \neg r)$
iv) $q \leftrightarrow s$

alle?

1b) Vind een V waarvoor alle vier de proposities waar zijn.

Stel $V \vDash q \leftrightarrow s$ dan volgt uit (sem $\leftrightarrow$) dat: $V \vDash q$ en $V \vDash s$ of $V \nvDash q$ en $V \nvDash s$.

Vaderre

Neem de situatie: $V \vDash s$ en $V \vDash q$.
Voor (ii) moet gelden dat $V \vDash \neg((p \wedge (q \vee r)) \vee (q \wedge r))$.
Uit (sem $\neg$) volgt dat $V \nvDash ((p \wedge (q \vee r)) \vee (q \wedge r))$.
Uit (sem $\vee$) volgt dat $V \nvDash (p \wedge (q \vee r))$ en $V \nvDash (q \wedge r)$.

4

Als $V \nvDash (q \wedge r)$ en $V \vDash q$ dan $V \nvDash r$ (sem $\wedge$)
Als $V \nvDash (p \wedge (q \vee r))$ en $V \vDash q$ en $V \nvDash r$ dan $V \nvDash p$ (sem $\wedge$), (sem $\vee$)

Voor een V met $V \vDash q$, $V \nvDash r$, $V \nvDash p$ en $V \vDash s$ geldt dat:
$V \vDash (p \vee (q \vee (r \vee s)))$ (sem $\vee$)
$V \vDash \neg(p \wedge (q \vee r)) \vee (q \wedge r))$ (zie uitwerking)
$V \vDash \neg s \rightarrow (\neg p \wedge \neg r)$ (1)
$V \vDash q \leftrightarrow s$ (sem $\leftrightarrow$)

Hieruit volgt dus dat Sméagol ~~en~~ Gollum de ring hebben.

(1) Voor V ~~met~~ waarbij $V \models q$ $V \models s$ $V \not\models r$ $V \not\models p$.

$\neg s \rightarrow (\neg p \wedge \neg p)$

Uit (scm ¬) volgt dat $V \not\models \neg s$, $V \models p$ en $V \models r$
Uit (scm →) volgt dat $V \not\models \neg s$ en/of $V \models p$ en $V \models r$ (scm ∧)
Dit is niet in tegenspraak met de valuatie dus geldt:

$$V \models (\neg s \rightarrow (\neg p \wedge \neg r))$$

1c Een waarheidsdefeniet voegwoord is een voegwoord dat de verbinding vormt tussen twee atoimaire proposities. Hierbij moet het zo zijn dat de waarheid van het geheel afhangt van de waarheid van de afzonderlijke delen.

6

Voorbeeld 1 ~~Bijvoorbeeld~~: Ik praat en ik fiets.

De atoimaire proposities zijn: Ik praat
Ik fiets.

Deze worden samengevoegd door het waarheidsdefénicte voegwoord en. Deze zin is slechts waar als de twee proposities allebei waar zijn, en anders niet.

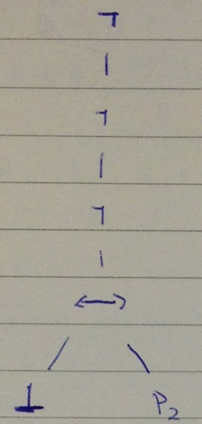
Voorbeeld 2: ~~De straat is nat~~ Ik wordt nat, want het regent.

De atoimaire proposities zijn: ~~De straat is nat.~~ Ik word nat.
Het regent.

Deze ~~worden~~ worden samengevoegd door een waarheidindefeniet voegwoord. Want geeft een causaal verband aan. Er bestaat een situatie waarvoor geldt dat de onderdelen van de propositie waar zijn. Maar de propositie zelf niet. Namelijk als je onder de douche staat (je wordt nat) en het buiten regent.

6

2a) - $\neg\neg\neg(\bot \leftrightarrow P_2)$ is een geldige formule.



hakjes)

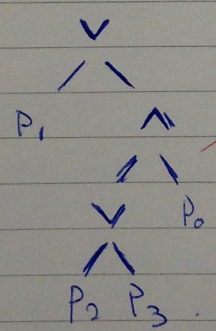
- :-) is geen geldige formule.

6

In de verzameling FOR mogen de volgende elementen voorkomen:
~~Atom~~-propositites, bijvoorbeeld ~~m~~ P_1
- $\bot$
- $\neg A$
- $(A \square B)$ waarbij $\square$ een voegteken is.

:, komt niet voor in de lijst van toegestane elementen.
-, komt niet voor in de lijst van toegestane elementen.
), mag alleen maar in de $(A \square B)$ combinatie voorkomen, dat is in dit geval niet het geval.

- $(P_1 \vee ((P_2 \vee P_3) \wedge P_0))$ is een geldige formule



Vanuit de voorrangsregels kunnen alleen de buitenste haken worden weggelaten
dus: $P_1 \vee ((P_2 \vee P_3) \wedge P_0)$

2b. $\neg((P_0 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_3))$.

$(\neg(P_0 \wedge P_1) \vee \neg(P_2 \wedge P_3))$ $\neg(A \vee B)$ eq. $(\neg A \vee \neg B)$.

$((\neg P_0 \wedge \neg P_1) \vee (\neg P_2 \wedge \neg P_3))$ $\neg(A \wedge B)$ eq. $(\neg A \vee \neg B)$.

De disjunctieve normaalvorm van $\neg((P_0 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_3))$ is:

$((\neg P_0 \wedge \neg P_1) \vee (\neg P_2 \wedge \neg P_3))$

2c $f(p_n) = x$ waarbij n ~~een natuur~~ is een natuurlijk getal! (1)

$f(\perp) = x$ (2)

$f(\neg A) = f(A) = x$ (3)

$f((A \square B)) = f((A \square B)) = xxx$ (4)

Regels van f op: $f(p_2) = x$.

(1) $f(p_n) = x$, dus klopt.

Regels van f op: $f(\perp) = x$.

(2) $f(\perp) = x$. dus klopt.

Regels van f op: $f(\neg\neg\neg p_1) = xxxx$

(3) $f(\neg\neg\neg p_1) = x$

(3) $f(\neg\neg\neg p_1) = xx$.

(3) $f(\neg\neg\neg p_1) = xxx$

(1) $f(\neg\neg\neg p_1) = xxxx$.

Regels van f op: $f((\perp \vee p_0)) = xxxxx$.

(4) $f((\perp \vee p_0)) = xxx$.

(1) $f((\perp \vee p_0)) = xxxx$.

(1) $f((\perp \vee p_0)) = xxxxx$

Voor 2b en 2c zie verderop in uitwerkingen!

2/3

Universiteit Utrecht

Faculteit Geesteswetenschappen

naam en voorletters: J. van Kemenade
(indien gehuwd, meisjesnaam)

geb. datum: 20-07-1993

reg. nr [redacted]
collegekaart

tentamen: Inleiding Logica

cijfer:

datum: 07-01-2013

studierichting: CKI

jaar/groep: 1

3a) Het redeneerschema R is geldig als geldt dat $\Gamma \models A$
Waarbij R de vorm Γ / A heeft.

p	q	r	⊥	q ∨ r	p ∧ (q ∨ r)	(q ∧ p) → ⊥	r → q
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	0	1

6

Er is een geval waarvoor geldt dat de premissen waar zijn en de conclusie niet, dus R betreft geen geldig schema.

3b. Er moet gelden $\Gamma \models A$
Dus $V \models \Gamma$ en $V \not\models A$.

Dit betekent dat $V \models ((q \wedge p) \to \bot)$
Uit (5cm →) en (5cm ⊥) volgt dat $V \models (q \wedge p)$
Uit (5cm ∧) volgt dat $V \not\models q$ en $V \not\models p$ (1)

6

Dit betekent ook dat $V \models (p \wedge (q \vee r))$
Uit (5cm ∧) volgt dat $V \models p$ en $V \models (q \vee r)$ (2)

Uit (2) en (5cm ∨) volgt dat $V \models q$ en/of $V \models r$.
Uit (1) en (2) volgt dat $V \not\models q$ en $V \models p$ en dat $V \models r$. (3)

Uit (3) volgt dat $V \models r$. en er moet gelden dat $V \models r \to q$
Uit (5cm →) volgt dat als $V \models r$ dan ook $V \models q$.
Maar uit (3) volgt ook dat $V \not\models q$, tegenspraak!

Dit betekent dat voor een V die de premissen waar maakt de conclusie niet waar is, dus het betreft hier een ongeldig redeneerschema.

3c R is geldig als $\Gamma \vDash A$. waarbij R is Γ / A.
Dit betekent dat als $V \vDash \Gamma$ dan ook $V \vDash A$.

Γ is een ~~samen~~ verzameling formules, als de verzameling waar is, dan de afzonderlijke delen ook.

Als Γ ~~uit~~ bijvoorbeeld ~~B~~ en C bestaat dan geldt dat als: $V \vDash \Gamma$ dan ook $V \vDash B$ en $V \vDash C$ maar ook $V \vDash (B \wedge C)$

Dat levert op $(B \wedge C) \vDash A$ wat te herschrijven is naar:
$\vDash (B \wedge C) \rightarrow A$

4

dit zou tautologie zijn.

Dat betekent dat als deze formule vervulbaar is dat het een geldige redenering betreft.

hoe

$\neg$!

$p \vDash q$ dit geldt

waarom $p \rightarrow q$ bewijzen.

4a

$$\dfrac{\dfrac{P_0 \wedge P_1}{P_0}\,\wedge E \qquad \dfrac{P_2 \wedge \neg P_0}{\neg P_0}\,\wedge E}{\dfrac{\bot}{P_3}\,\bot E}\,\neg E$$

6

Bovenstaande afleidingsboom laat doormiddel van natuurlijke deductie zien dat het syntactisch te bewijzen is dat $P_0 \wedge P_1,\ P_2 \wedge \neg P_0 \vdash' P_3$

Voor dit bewijs zijn enkel de gegeven hypotheses gebruikt.

4b

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P_1]^1}{(P_0 \vee P_1)}\vee I \qquad \neg(P_0 \vee P_1)}{\bot}\neg E}{\neg P_1}\neg I,1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[P_0]^2}{(P_0 \vee P_1)}\vee I \qquad \neg(P_0 \vee P_1)}{\bot}\neg E}{\neg P_0}\neg I,2}{(\neg P_1 \wedge \neg P_0)}\wedge I$$

6

Bovenstaande afleidingsboom laat doormiddel van de gegeven hypotheses zien dat $\neg(P_0 \vee P_1) \vdash (\neg P_1 \wedge \neg P_0)$

4c

0

$$\dfrac{\dfrac{P_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P_1]^2}{}\neg E}{\bot}\neg I,2}{\neg P_1} \qquad [(\neg P_1 \to (P_1 \to P_0))]^1}{P_1 \to P_0}\to E}{P_0}\to E}{(P_0 \to (\neg P_1 \to (P_1 \to P_0)))}\to I,1$$

2b) $\neg((P_0 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_3))$

$(\neg(P_0 \wedge P_1) \wedge \neg(P_2 \wedge P_3))$ $\quad \neg(A \vee B)$ eq. $(\neg A \wedge \neg B)$

$((\neg P_0 \vee \neg P_1) \wedge (\neg P_2 \vee \neg P_3))$ $\quad \neg(A \wedge B)$ eq $(\neg A \vee \neg B)$

~~$(((\neg P_0 \vee \neg P_1) \wedge \neg P_2) \vee ((\neg P_0 \vee \neg P_1) \wedge \neg P_3))$ $A \vee (B \wedge C)$ eq. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$~~

~~$(A \vee B) \wedge C$ eq $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$~~

6

$A \wedge (B \vee C)$ eq. $(A \wedge B) \vee (B \wedge C)$ dus:

$(((\neg P_0 \vee \neg P_1) \wedge \neg P_2) \vee ((\neg P_0 \vee \neg P_1) \wedge \neg P_3))$

$(A \vee B) \wedge C$ eq. $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$. dus:

$(((\neg P_0 \wedge \neg P_2) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2)) \vee ((\neg P_0 \wedge \neg P_3) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_3)))$

5a) i) ~~P~~ Waarheidstafel voor $P_0 \to P_0$:

P_0	P_0	$P_0 \to P_0$
0	0	1
1	1	1

Uit de waarheidstafel van $P_0 \to P_0$ volgt dat voor alle V geldt dat $V \models P_0 \to P_0$ (1)

Uit (sem $\to$) en (1) volgt dat $V \not\models ((P_0 \to P_0) \to \bot)$ desda voor alle V geldt dat $V \models \bot$.

Maar de definitie van Falsum is dat ~~van~~ deze altijd onwaar is, daardoor geldt voor alle V dat $V \not\models ((P_0 \to P_0) \to \bot)$

6

Dus $((P_0 \to P_0) \to \bot)$ is een contradictie.

ii) Waarheidstafel voor: $(P_0 \to (P_0 \to \bot))$

P_0	$\bot$	$P_0 \to \bot$	$P_0 \to (P_0 \to \bot))$
0	0	1	1
1	0	0	0

Uit de waarheidstafel volgt dat $(P_0 \to (P_0 \to \bot))$ een contigentie formule betreft.

Universiteit Utrecht

Faculteit Geesteswetenschappen

3/3

naam en voorletters: J. van Kemenade.
(indien gehuwd, meisjesnaam)

geb. datum: 20-07-1993.

reg. nr. [redacted]
collegekaart

tentamen: Inleiding Logica

datum: 07-10-2013

studierichting: CKI

jaar/groep: 1.

cijfer:

5b. $\{p, \neg q \vee r, p \vee q, \neg r \vee p\}$ is ~~niet~~ strijdig als er een V is waar voor waar geldt dat: $V \models p$

$V \models \neg q \vee r$.

$V \models p \vee q$.

$V \models \neg r \vee p$. ?

Als ~~Stel~~ $V \not\models p$ dan is de verzameling dus ~~strijdig~~ al strijdig.

Stel $V \not\models p$ dan volgt uit (sem ∨) dat $V \models q$.

~~...~~ Stel $V \not\models p$ dan volgt uit (sem ∨) en (sem ¬) dat $V \models r$.

Dan volgt uit (sem ¬) en (sem ∨) dat $V \models q$. ?

2

Dus het stelsel is strijdig voor V met:
$V \not\models p$, $V \models q$ en $V \models r$.

5c. Laat zien dat $\nvdash p \wedge \neg p$.

Het principe van correctheid en volledigheid stelt dat als kan worden bewezen dat $\not\models p \wedge \neg p$ dat dan ~~ook~~ geldt dat $\nvdash p \wedge \neg p$.

6

Er moet dus worden bewezen dat voor alle V geldt dat:
$V \not\models p \wedge \neg p$.

Stel $V \models p$ uit (sem ¬) volgt dat $V \not\models \neg p$.
Uit (sem ∧) volgt dan dat $V \not\models p \wedge \neg p$

Stel $V \not\models p$ uit (sem ¬) volgt dat $V \models \neg p$.
Uit (sem ∧) volt dan dat $V \not\models p \wedge \neg p$

Voor alle V geldt dat $V \not\models p \wedge \neg p$ dus geldt dat $\not\models p \wedge \neg p$
En door correctheid en volledigheid geldt dan ook $\nvdash p \wedge \neg p$.

Functie

(bonus) Een verzameling is functioneel volledig als elke formule ermee gemaakt kan worden.

Binnen de logica zijn er drie soorten formules.
contradicties.
tautologieën.
contingenties.

Op het moment dat je de verzameling $\{\bot, \neg\}$ hebt kan je enkel contradicties en tautologieën bouwen.

2

$\bot$ is immers een contradictie. P_1 -- niet.
$\neg\bot$ is immers een tautologie.

En elke willekeurige hoeveelheid $\neg$ achter elkaar levert ook een contradictie of een tautologie op.

2c (1) $f(P_n)$: $f(P_n) = x$. met $n \in \mathbb{N}$
(2) $f(\bot)$: $f(\bot) = x$.
(3) $f(\neg A)$: $f(\neg A) = f(A) + x$
(4) $f((A \square B))$: $f((A \square B)) = x + f(A) + f(B) + xx$

6

Regels van f op voorbeelden:
$f(P_2) = x$: (1) $f(P_2) = x$
$f(\bot) = x$: (2) $f(\bot) = x$.
$f(\neg\neg\neg P_1) = xxxx$: (3) $f(\neg\neg\neg P_1) = f(\neg\neg P_1) + x$
(3) $f(\neg\neg\neg P_1) = f(\neg P_1) + xx$.
(3) $f(\neg\neg\neg P_1) = f(P_1) + xxx$
(1) $f(\neg\neg\neg P_1) = xxxx$
$f((\bot \vee P_0))$: (4) $f((\bot \vee P_0)) = x + f(\bot) + f(P_0) + xx$
(2) $f((\bot \vee P_0)) = xx + f(P_0) + xx$.
(1) $f((\bot \vee P_0)) = xxxxx$