blad 1/2

Universiteit Utrecht

Faculteit Geesteswetenschappen

naam en voorletters (indien gehuwd, meisjesnaam): [redacted]

geb. datum:

reg. nr. collegekaart: [redacted]

tentamen: Inl. Logica 1

datum: 7-10-2013

studierichting:

jaar/groep:

cijfer:

---

1 a) Vertaalsleutel:

f = Frodo heeft de ring 8 b = Bilbo heeft de ring

g = Gollum heeft de ring s = Sméagol heeft de ring.

1	2	3	4	5	B	Σ
18	18	18	15	16	—	85

6

de vertaling wordt dan:

i) $(f \vee (g \vee (b \vee s)))$ 8

ii) $((f \wedge (\neg g \wedge \neg b)) \vee ((g \wedge (\neg f \wedge \neg b)) \vee ((b \wedge (\neg f \wedge \neg g)) \vee (\neg f \wedge (\neg g \wedge \neg b)))))$

iii) $(\neg s \rightarrow (\neg f \wedge \neg b))$ 8

iv) $s \Leftrightarrow g$ 8

b) We zoeken naar valuaties V z.d.d. V alle zinnen (i-iv) waar maakt. Dit doen we aan de hand van een waarheidstafel, want met modellen wordt zin ii) erg lang om af te leiden. 8

6

V	f	g	b	s	i	ii	iii	iv
1	0	0	0	0	0	1	1	1
2	0	0	0	1	1	1	1	0
3	0	0	1	0	1	1	0	1
4	0	0	1	1	1	1	1	0
5	0	1	0	0	1	1	1	0
6	0	1	0	1	1	1	1	1
7	0	1	1	0	1	0	0	0
8	0	1	1	1	1	0	1	1
9	1	0	0	0	1	1	0	1
10	1	0	0	1	1	1	1	0
11	1	0	1	0	1	0	0	1
12	1	0	1	1	1	0	1	0
13	1	1	0	0	1	0	0	0
14	1	1	0	1	1	0	1	1
15	1	1	1	0	1	0	0	0
16	1	1	1	1	1	0	1	1

8 8 8 8

Er is slechts 1 valuatie waarvoor alle premissen waar zijn. Namelijk V_6. Deze geeft dat $V_6(g)=1$ en $V_6(s)=1$ en $V_6(f)=0$ en $V_6(b)=0$. Dus Gollum en Sméagol hebben de ring. 8

(1c op ~~achterste~~ andere blad)

2 De inductieve definitie van de verzameling FOR is:

(i) $p_i \in FOR$, voor alle i;

(ii) $\bot \in FOR$;

(iii) Als $A \in FOR$, dan $\neg A \in FOR$;

(iv) Als $A, B \in FOR$, dan $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B) \in FOR$.

Hiermee beantwoorden we de vragen. 6

a) $\neg\neg\neg(\bot \leftrightarrow p_2)$ is een ~~ee~~ formule v.d. propositielogica. Het is te ontleden volgens de ~~deze~~ definitie van FOR:

$\neg\neg\neg(\bot \leftrightarrow p_2)$

(iii) $\neg\neg(\bot \leftrightarrow p_2)$

(iii) $\neg(\bot \leftrightarrow p_2)$

(iii) $(\bot \leftrightarrow p_2)$

(iv) $\bot$ (ii) $\quad p_2$ (i)

:-) is geen formule, omdat de tekens : en - niet voorkomen in de definitie van FOR.

6

$(p_1 \vee ((p_2 \vee p_3) \wedge p_0))$ is wel een formule, het ~~te~~ is te ontleden volgens de definitie van FOR: 6

$(p_1 \vee ((p_2 \vee p_3) \wedge p_0))$

(iv) (i) $p_1 \quad ((p_2 \vee p_3) \wedge p_0)$

(iv) $(p_2 \vee p_3) \quad p_0$ (i)

(iv) (i) $p_2 \quad p_3$ (i)

- Voor formule $\neg\neg\neg(\bot \leftrightarrow p_2)$ kunnen geen haakjes meer worden weggelaten. Dan zou het lijken alsof er $\neg\neg\neg\bot$ ~~stond~~ staat. 6
- ~~De~~ formule $(p_1 \vee ((p_2 \vee p_3) \wedge p_0))$ mag worden geschreven als: $p_1 \vee ((p_2 \vee p_3) \wedge p_0)$. Het weglaten van meer haakjes zou onduidelijk geven over de betekenis.

b) We bepalen ~~de~~ een disjunctieve normaalvorm van $\neg((p_0 \wedge p_1) \vee (p_2 \wedge p_3))$ met behulp van equivalenties (zoals in Syllabus H 6).

$\neg((p_0 \wedge p_1) \vee (p_2 \wedge p_3))$ Eq (een wet van de Morgan)
$\neg(p_0 \wedge p_1) \wedge \neg(p_2 \wedge p_3)$ Eq (andere wet van de Morgan)
$(\neg p_0 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3)$ Eq (distributiviteit van $\wedge$ over $\vee$)
$((\neg p_0 \vee \neg p_1) \wedge \neg p_2) \vee ((\neg p_0 \vee \neg p_1) \wedge \neg p_3)$ Eq (commutativiteit van $\wedge$)
6
$(\neg p_2 \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1)) \vee (\neg p_3 \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1))$ Eq (distributiviteit van $\wedge$ over $\vee$)
$\{(\neg p_2 \wedge \neg p_0) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_1)\} \vee \{(\neg p_3 \wedge \neg p_0) \vee (\neg p_3 \wedge \neg p_1)\}$. Dit is ~~de~~ een disjunctieve normaalvorm van $\neg((p_0 \wedge p_1) \vee (p_2 \wedge p_3))$

c) De recursieve definitie van de functie f op FOR:
(i) $f(p_i) := x$, voor alle i;
(ii) $f(\bot) := x$;
(iii) Als $A \in$ FOR, dan $f(\neg A) := x\,f(A)$;
(iv) Als $A, B \in$ FOR, dan $f((A \Box B)) := x\,f(A)\,x\,f(B)\,x$.

6

Dan kunnen we de gegeven voorbeelden berekenen:
- $f(p_2) =_{(i)} x$
- $f(\bot) =_{(ii)} x$
- $f(\neg\neg\neg p_1) =_{(iii)} x\,f(\neg\neg p_1) =_{(iii)} xx\,f(\neg p_1) =_{(iii)} xxx\,f(p_1) =_{(i)} xxxx$
- $f((\bot \vee p_0)) =_{(iv)} x\,f(\bot)\,x\,f(p_0)\,x =_{(ii)} xxx\,f(p_0)\,x =_{(i)} xxxxx$

3 a) Een redeneerschema is geldig desda alle valuaties V die alle premissen waarmaken ook de conclusie waarmaken.
M.a.w. ~~als~~ er een valuatie V is die alle premissen waarmaakt, maar de conclusie niet, dan is ~~de redenati~~ het redeneerschema niet geldig.

6

V	p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(q \wedge p) \to \bot$		$r \to q$
1	0	0	0	0	1		1
2	0	0	1	0	1		0
3	0	1	0	0	1		1
4	0	1	1	0	1		1
5	1	0	0	0	1		1
6	1	0	1	1	1	*	0
7	1	1	0	1	0		1
8	1	1	1	1	0		1

Er is een valuatie (V_6) die alle premissen waarmaakt en deze maakt de conclusie niet waar, dus ~~het~~ R is niet geldig.

b) We zoehen een valuatie V z.d.d. $V \vDash p \wedge (q \vee r)$, $V \vDash (q \wedge p) \to \bot$ en $V \nvDash r \to q$. (de conclusie mag niet waar zijn in een tegenvoorbeeld).

Nu geldt:

$V \vDash p \wedge (q \vee r)$ desda (sem$\wedge$) $V \vDash p$* en $V \vDash (q \vee r)$

$V \vDash (q \vee r)$ desda (sem$\vee$) $V \vDash q$ of $V \vDash r$. ①

$V \nvDash r \to q$ desda (sem$\to$) $V \vDash r$ ~~of~~ en $V \nvDash q$

$V \vDash (q \wedge p) \to \bot$ desda (sem$\to$) $V \nvDash (q \wedge p)$ of $V \vDash \bot$. Er geldt dat $V \nvDash \bot$, dus moet ~~ge~~ volgen $V \nvDash (q \wedge p)$.

6

$V \nvDash (q \wedge p)$ desda (sem$\wedge$) $V \nvDash q$ ~~en~~ of $V \nvDash p$.

Er geldt volgens * dat $V \vDash p$, dus moet gelden $V \nvDash q$.

Dan volgt dat ~~*~~, vanwege ①, $V \vDash r$. Dus als $V \vDash p$, $V \nvDash q$ en $V \vDash r$, dan $V \vDash p \wedge (q \vee r)$, $V \vDash (q \wedge p) \to \bot$ en $V \nvDash r \to q$. Er is dus een valuatie die de premissen waarmaakt en de conclusie niet, dus R is niet geldig.

c) Om te bepalen of en redeneerschema geldig is zoehen we naar een bepaalde valuatie V die een tegenvoorbeeld geeft. Als we A zo maken dat deze alleen vervulbaar is als die V bestaat kunnen we de vraag of R geldig is herformuleren.

6

Zo'n A is de conjunctie van de premissen van R en de negatie van de conclusie van R. Als A dan vervulbaar is, is er een valuatie V z.d.d. de premissen waar zijn, maar de conclusie niet, dus is R niet geldig. Als A onvervulbaar is, dan bestaat die valuatie niet, dus is ~~er~~ R geldig.

Voor onze R zou A zijn: $((p \wedge (q \vee r)) \wedge (((q \wedge p) \to \bot) \wedge \neg(r \to q)))$

4a) Te bewijzen: $p_0 \wedge p_1, p_2 \wedge \neg p_0 \vdash p_3$.

6

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p_0 \wedge p_1}{p_0}\wedge E \qquad \dfrac{p_2 \wedge \neg p_0}{\neg p_0}\wedge E}{\bot}\neg E}{p_3}\bot E$$

De wortel van de afleidingsboom is p_3 en de open aannames waren gegeven en er zijn alleen ND-regels gebruikt, dus deze boom laat zien dat:

$p_0 \wedge p_1, p_2 \wedge \neg p_0 \vdash p_3$

(4(b) achter op andere blad)

blad 2/2

Universiteit Utrecht

Faculteit Geesteswetenschappen

naam en voorle[redacted]
(indien gehuwd, meisjesnaam)

geb. datum:

tentamen: Inl. Logica

datum: 7-10-2013

studierichting:

reg. nr. [redacted]
collegekaart

jaar/groep:

cijfer:

6

4 c) Te ~~b~~ bewijzen: $\vdash (p_0 \to (\neg p_1 \to (p_1 \to p_0)))$

Optie 1:

$[p_0]^1$
$[\neg p_1]^2$
$[p_1]^3$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p_1]^3 \quad [\neg p_1]^2}{\bot}\,\neg E}{p_0{}^3}\,\bot E}{(p_1 \to p_0)^2}\,\to I}{(\neg p_1 \to (p_1 \to p_0))^1}\,\to I}{(p_0 \to (\neg p_1 \to (p_1 \to p_0)))}\,\to I$$

De wortel van de boom is $(p_0 \to (\neg p_1 \to (p_1 \to p_0)))$ en er zijn geen open aannames en er zijn alleen ND-regels gebruikt, dus deze boom bewijst $\vdash (p_0 \to (\neg p_1 \to (p_1 \to p_0)))$

Optie 2:

$[p_0]^1$
$[\neg p_1]^2$
$[p_1]^3$

dus, van overbodig

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p_1]^3 \quad [p_0]^1}{p_1 \wedge p_0}\,\wedge I}{p_0{}^3}\,\wedge E}{(p_1 \to p_0)^2}\,\to I}{(\neg p_1 \to (p_1 \to p_0))^1}\,\to I}{(p_0 \to (\neg p_1 \to (p_1 \to p_0)))}\,\to I$$

De wortel van de boom is $(p_0 \to (\neg p_1 \to (p_1 \to p_0)))$ en er zijn geen open aannames en er zijn alleen ND-regels gebruikt, dus deze boom bewijst: $\vdash (p_0 \to (\neg p_1 \to (p_1 \to p_0)))$

4

5 a) Om te bepalen of iets een tautologie, contradictie of contingentie is moeten we weten of de waarheids waarde afhangt van die van de variabelen. Dit kan met equivalenties en waarheidstabels:

I) $((p_0 \to p_0) \to \bot)$ Eq (~~idempotentie~~ $\to$)
$(p_0 \to \bot)$ Eq (volgens $\neg A$ Eq $A \to \bot$ uit syllabus)
$\neg p_0$. De waarheids waarde van $\neg p_0$ is afhankelijk van die van p_0, dus deze formule is een contingentie.

II) $(p_0 \to (p_0 \to \bot))$ Eq (volgens $\neg A$ Eq $A \to \bot$)
$(p_0 \to \neg p_0)$. De waarheids tafel hiervan is

p_0	$\neg p_0$	$p_0 \to \neg p_0$
0	1	1
1	0	0

De waarheids waarde van de formule is dus afhankelijk van die van de variable, dus de formule is een contingentie.

b) En verzameling is strijdig als er geen enkele valuatie V is z.d.d. alle elementen waar zijn. Met behulp van waarheidstafels zoeken we een valuatie die alle elementen waar maakt.

V	p	q	r	p	¬q∨r	p∨q	¬r∨p	
1	0	0	0	0	1	0	1	
2	0	0	1	0	1	0	0	
3	0	1	0	0	0	1	1	
4	0	1	1	0	1	1	0	
5	1	0	0	1	1	1	1	×
6	1	0	1	1	1	1	1	×
7	1	1	0	1	0	1	1	
8	1	1	1	1	1	1	1	×

De valuaties V_5, V_6 en V_8 ~~geven~~ maken alle elementen van de verzameling waar, dus de verzameling is niet strijdig.

6

c) We moeten laten zien dat $\nvdash p \wedge \neg p$. We kunnen met behulp van ND niet aantonen dat iets niet afleidbaar is, want het is onmogelijk om 'alle bomen' te proberen en als het niet lukt de afleiding te maken te concluderen dat $\nvdash p \wedge \neg p$. Daarom maken we gebruik van de correctheidsstelling. (syllabus prop.log. H10). Deze stelt dat $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \vDash A$. Met contrapositie van (meta)-implicatie volgt hieruit dat $\Gamma \nvDash A \Rightarrow \Gamma \nvdash A$. Dus we moeten aantonen dat $\nvDash p \wedge \neg p$

6

We zoeken een valuatie V, z.d.d. $V \vDash p \wedge \neg p$.
$V \vDash p \wedge \neg p$ desda (sem ∧) $V \vDash p$* en $V \vDash \neg p$
$V \vDash \neg p$ desda (sem ¬) $V \nvDash p$. Dit is in tegenspraak met *
Dus er is geen V z.d.d. $V \vDash p \wedge \neg p$. Dus $p \wedge \neg p$ is een contradictie, dus $\nvDash p \wedge \neg p$.

Volgens de correctheidsstelling geldt nu dat
$\nvDash p \wedge \neg p \Rightarrow \nvdash p \wedge \neg p$. dus we hebben $\nvdash p \wedge \neg p$ bewezen.

1 c) Een voegteken is waarheidsdefiniet als de waarheidswaarde van de propositie die hij maakt afleidbaar is van slechts de waarheidswaarden van de ~~delen~~ proposities die hij verbindt. Een waarheids definiet voegwoord is bijvoorbeeld 'en'! De waarheid van de zin: 'Ik loop en ik houd van spruitjes' is alleen afhankelijk van de waarheden van 'Ik loop' en 'ik houd van spruitjes'.

6

Een niet-waarheids definiet voegwoord is bijvoorbeeld 'omdat'! De waarheid van de zin 'Ik ben groot omdat ik boterhammen met pindakaas at' is niet slechts afhankelijk van de waarheidswaarden van de delen. Het geeft namelijk een causaal verband en dat is van meer afhankelijk. (Er zijn ook kleine mensen die veel boterhammen met pindakaas aten).

4 b) Te bewijzen: $\neg(p_0 \vee p_1) \vdash (\neg p_1 \wedge \neg p_0)$

$[p_1]^1$

$[p_0]^2$

3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p_1]^1}{p_0 \vee p_1}\vee I \qquad \neg(p_0 \vee p_1)}{\bot^1}\neg E \quad \wedge \quad \dfrac{\dfrac{[p_0]^2}{p_0 \vee p_1}\vee I \qquad \neg(p_0 \vee p_1)}{\bot^2}\neg E}{(\neg p_1 \wedge \neg p_0)}\neg I$$

4

De wortel van deze boom is $(\neg p_1 \wedge \neg p_0)$, de open aanames zijn de gegeven aaname en er zijn alleen ND-regels gebruikt, dus deze boom bewijst:

$\neg(p_0 \vee p_1) \vdash (\neg p_1 \wedge \neg p_0)$.