Opgaven Practicum

Hester Vogels

23 september 2013

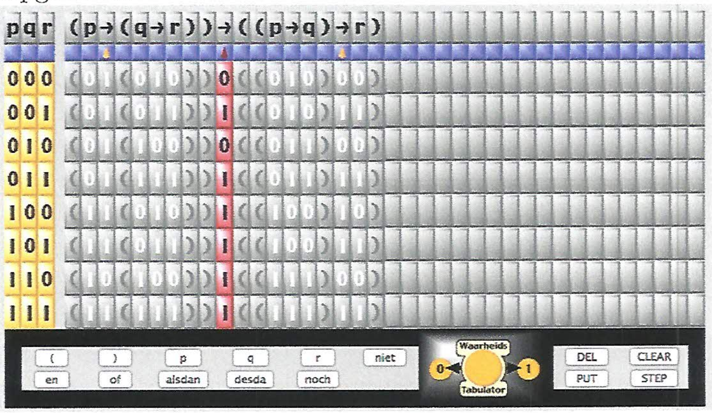
9,5

1 Waarheidstafels

Hoofdstuk 4 syllabus Propositielogica

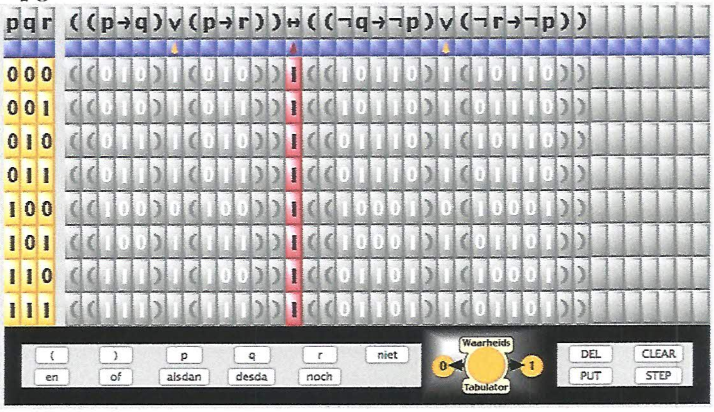
Het was me niet helemaal duidelijk hoeveel ik moet uitleggen bij de waarheidstafels gegenereerd door de waarheidstabulator. Ik snap in elk geval hoe hij werkt en had ze ook zelf kunnen maken.

Opgave 4.3



Eerst worden de waarden van p, q en r ingevuld. Dan wordt $p \to q$ en $q \to r$ ingevuld, want die staan in de binnenste haakjes. Deze waarheidswaarden zijn altijd 1 tenzij het de combinatie $1 \to 0$ is. Daarna worden $p \to (q \to r)$ en $(p \to q) \to r$ ingevuld. En ten slotte $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to r)$.

Opgave 4.5

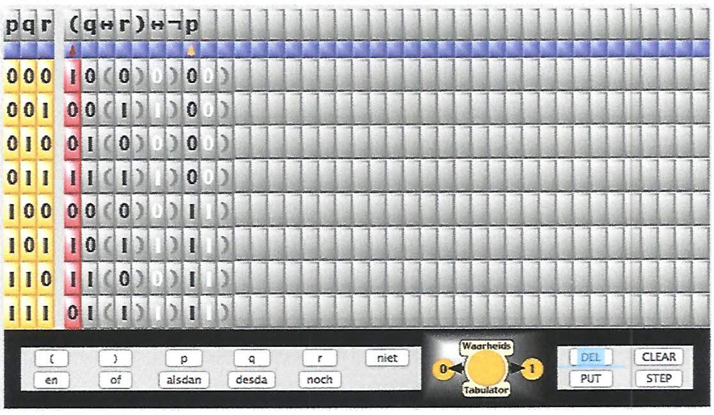


Eerst worden de waarden van p, q en r ingevuld. Dan worden $\neg p$, $\neg q$ en $\neg r$ ingevuld door de tegenovergestelde waarde te nemen. Daarna worden de 'als-dan' tekens ingevuld, dan de 'of' tekens en ten slotte het 'desda' teken.

2 Zelfgemaakte formule A

De opdracht was om een formule te maken waarin p, q en r voorkomen, zodanig dat A waar is desda er van de waardheidswaarden van p, q en r er precies een even aantal 1 is.

Ik begon eerst de acht mogelijkheden voor de combinaties van de waarheidswaarden van p, q en r uit te schrijven. Bij vier van deze combinaties is er precies een even aantal 1: 000, 011, 101 en 110. Ik begon met de volgende voor de hand liggende formule: $(p \wedge ((\neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r))) \vee (\neg p \wedge ((q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)))$. Vervolgens maakte ik de waarheidstafels voor $(\neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$ en $(q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$ met het doel een kortere formule te vinden. Ik kwam erachter dat $(\neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$ gelijk is aan $\neg(q \leftrightarrow r)$ en $(q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$ gelijk is aan $q \leftrightarrow r$. Dus mijn formule kon ik korter schrijven als $(p \wedge \neg(q \leftrightarrow r)) \vee (\neg p \wedge (q \leftrightarrow r))$. Ik zag dat dit dan weer gelijk was aan de formule $(q \leftrightarrow r) \leftrightarrow \neg p$. En die formule vond ik kort genoeg. Tot slot deed ik een check bij de waarheidstabulator:



Het klopt. Ik heb een formule A bedacht die waar is desda er van de waarheidswaarden van p, q en r er precies een even aantal 1 is.

Opgaven Werkcollege

Hester Vogels

23 september 2013

Propositielogicasyllabus Hoofdstuk 4

Opgave 2 de laatste 3

Opgave (v): $(p \to q) \to p$

p	q	(	p	→	q	)	→	p
0	0	(	0	1	0	)	0	0
0	1	(	0	1	1	)	0	0
1	0	(	1	0	0	)	1	1
1	1	(	1	1	1	)	1	1

In de achtste kolom staat de waarheidswaarde van de gehele formule. Het is een Contingentie.

Opgave (vi): $((p \to q) \to p) \to p$

p	q	(	(	p	→	q	)	→	p	)	→	p
0	0	(	(	0	1	0	)	0	0	)	1	0
0	1	(	(	0	1	1	)	0	0	)	1	0
1	0	(	(	1	0	0	)	1	1	)	1	1
1	1	(	(	1	1	1	)	1	1	)	1	1

-0,25, leg uit waarom het een contingentie / tautologie is

In de twaalfde kolom staat de waarheidswaarde van de gehele formule. Het is een Tautologie.

Opgave (vii): $(p \leftrightarrow q) \to (p \leftrightarrow \neg q)$

p	q	(	p	↔	q	)	→	(	p	↔	¬	q	)
0	0	(	0	1	0	)	0	(	0	0	1	0	)
0	1	(	0	0	1	)	1	(	0	1	0	1	)
1	0	(	1	0	0	)	1	(	1	1	1	0	)
1	1	(	1	1	1	)	0	(	1	0	0	1	)

In de zevende kolom staat de waarheidswaarde van de gehele formule. Het is een Contingentie.

Opgave 5(iv)

De opgave luidt om voor de propositie $(((t \leftrightarrow s) \leftrightarrow \neg u) \leftrightarrow p) \leftrightarrow t$ de waarheidswaarde te vinden. Hierbij geldt dat p waar is, en s, t en u onwaar zijn. Ik bereken de waarheidswaarde door een waarheidstafel te maken.

p	s	t	u	(	(	(	t	↔	s	)	↔	¬	u	)	↔	p	)	↔	t
0	0	0	0	(	(	(	0	1	0	)	1	1	0	)	0	0	)	1	0
1	0	0	0	(	(	(	0	1	0	)	1	1	0	)	1	1	)	0	0
0	1	0	0	(	(	(	0	0	1	)	0	1	0	)	1	0	)	0	0
0	0	1	0	(	(	(	1	0	0	)	0	1	0	)	1	0	)	1	1
0	0	0	1	(	(	(	0	1	0	)	0	0	1	)	1	0	)	0	0
1	1	0	0	(	(	(	0	0	1	)	0	1	0	)	0	1	)	1	0
0	1	1	0	(	(	(	1	1	1	)	1	1	0	)	0	0	)	0	1
0	0	1	1	(	(	(	1	0	0	)	1	0	1	)	0	0	)	0	1
1	0	0	1	(	(	(	0	1	0	)	0	0	1	)	0	1	)	1	0
1	0	1	0	(	(	(	1	0	0	)	0	1	0	)	0	1	)	0	1
0	1	0	1	(	(	(	0	0	1	)	1	0	1	)	0	0	)	1	0
1	1	1	0	(	(	(	1	1	1	)	1	1	0	)	1	1	)	1	1
1	1	0	1	(	(	(	0	0	1	)	1	0	1	)	1	1	)	0	0
1	0	1	1	(	(	(	1	0	0	)	1	0	1	)	1	1	)	1	1
0	1	1	1	(	(	(	1	1	1	)	0	0	1	)	1	0	)	1	1
1	1	1	1	(	(	(	1	1	1	)	0	0	1	)	0	1	)	0	1

Als we nu kijken in de tweede rij (mogelijkheid 1,0,0,0) en de 19e (enalaatste) kolom, dan zien we de waarde 0 staan. Dat betekent dat de gevraagde propositie onwaar is.

Opgave 6(vi)

De vraag is wat we weten van de formule $(p \to q) \wedge (p \to \neg q)$, als we weten dat p waar is. Ik maak een waarheidstafel.

p	q	(	p	→	q	)	∧	(	p	→	¬	q	)
0	0	(	0	1	0	)	1	(	0	1	1	0	)
0	1	(	0	1	1	)	1	(	0	1	0	1	)
1	0	(	1	0	0	)	0	(	1	1	1	0	)
1	1	(	1	1	1	)	0	(	1	0	0	1	)

Het gaat nu om de laatste twee rijen, want we weten dat p waar is. Nu geldt dat als q onwaar is, dan is $p \to q$ onwaar en $p \to \neg q$ waar. Dan is $(p \to q) \wedge (p \to \neg q)$ onwaar. Als q waar is, dan is $p \to q$ waar en $p \to \neg q$ onwaar. Dan is $(p \to q) \wedge (p \to \neg q)$ opnieuw onwaar. Dat betekent dat de formule sowieso onwaar is als p waar is, wat de waarheidswaarde van q ook mag zijn.

Opgave 7(i)

Als $A \to B$ een contradictie is, dan is de waarheidswaarde van $A \to B$ 0. Aangezien de waarheidstabel van het 'als-dan' teken er als volgt uit ziet, moet het wel gelden dat de formule A waar is en de formule B onwaar is.

A	B	A	$\rightarrow$	B
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Zie in bovenstaande tabel de derde rij. Als A waar is, en B onwaar, dan is $A \rightarrow B$ onwaar.

Inductiesyllabus

Opgave 2.1.5(b)

De inductieve definitie van FOR" is nu als volgt:

(i) p_0, p_1, p_2, p_3,... zijn elementen van FOR";
(ii) $\top$ is een element van FOR";
(iii) Als A een element van FOR" is, dan ook $\neg A$;
(iv) Als A en B elementen van FOR" zijn, dan ook: $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A|B)$.

Ik heb op alle plekken het woord 'FOR' vervangen door 'FOR"'. Daarnaast heb ik het falsum ($\bot$) vervangen door het verum ($\top$). Ten slotte heb ik het bi-implicatie teken ($\leftrightarrow$) vervangen door de Sheffer stroke ($|$).

Opgave 2.3.4 de vijfde

De vraag is of $\Diamond\Diamond\triangle\Diamond\Diamond\triangle$ een blurps is of niet. Hierbij houden we rekening met de volgende inductieve definitie:

(i) $\triangle$ is een Blurps;
(ii) Als x een Blurps is, dan zijn ook $x\triangle\triangle$ en $\Diamond xx\Diamond$ Blurpsen;
(iii) Als x en y Blurpsen zijn, dan is ook $x\triangle y$ een Blurps.

$\Diamond\Diamond\triangle\Diamond\Diamond\triangle \neq \triangle$ en $\Diamond\Diamond\triangle\Diamond\Diamond\triangle$ is niet van de vorm $x\triangle\triangle$, want er staan geen twee driehoekjes naast elkaar. En $\Diamond\Diamond\triangle\Diamond\Diamond\triangle$ is ook niet van de vorm $\Diamond xx\Diamond$, want naast het laatste diamantje staat nog een driehoekje. Dan is er nog een mogelijkheid waarop het een Blurps kan zijn: als het van de vorm $x\triangle y$ is, waarbij x en y Blurpsen zijn. Dan is x gelijk aan $\Diamond\Diamond$ en y gelijk aan $\Diamond\Diamond\triangle$. Nu geldt dat x geen Blurps is, want $\Diamond\Diamond \neq \triangle$ en $\Diamond\Diamond$ is niet van de vorm $x\triangle\triangle$, $\Diamond xx\Diamond$ of $x\triangle y$. Ook y is geen Blurps want $\Diamond\Diamond\triangle \neq \triangle$ en $\Diamond\Diamond\triangle$ is niet van de vorm $x\triangle\triangle$, $\Diamond xx\Diamond$ of $x\triangle y$. Dus x en y zijn beiden geen Blurps. Dan kan $\Diamond\Diamond\triangle\Diamond\Diamond\triangle$ ook niet van de vorm $x\triangle y$ zijn. Dan is er geen enkele mogelijkheid meer waarop $\Diamond\Diamond\triangle\Diamond\Diamond\triangle$ een Blurps kan zijn.

en x kan niet leeg zijn -0,25

Opgave 3.1.7(i) de derde

In plaats van het hekje gebruik ik een sterretje, want Latex geeft een foutmelding bij het hekje. De opdracht is om * stapsgewijs te berekenen volgens de recursieve definitie voor $((p_0 \wedge p_0) \vee (p_0 \wedge p_0))$.

$*(((p_0 \wedge p_0) \vee (p_0 \wedge p_0))) = 1 + *((p_0 \wedge p_0)) + *((p_0 \wedge p_0)) + 1$ volgens regel (iv)
$= 1 + 1 + *(p_0) + *(p_0) + 1 + 1 + *(p_0) + *(p_0) + 1 + 1$ volgens regel (iv)
$= 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1$ volgens regel (i)
$= 6$